

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier P. Scherrer E. Stiefel
F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler
Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

LIST, R.: Kennzeichen atmosphärischer Eisparkeln, 2. Teil: Hagelkörner	217
ROTH-DESMEULES, E.: Über die Darstellung einer Flugbahnschar und ihrer Störungen für Feuer- leitgeräte	235
SCHNEIDER, T., und SCHRANZ, P.: Möglichkeiten und Grenzen des Infrarotsehens	251
SHIELD, R. T., and ZIEGLER, H.: On Prager's Hardening Rule	260

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

STEWARTSON, K.: On the Free Convection from a Horizontal Plate	276
--	-----

Varia - Miscellaneous - Divers

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 3. bis 4. Mai 1958 in Romont	282
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques	302

ZAMP	Vol. IXa	Fasc. 3	Pag. 217-306	25. 9. 58
------	----------	---------	--------------	-----------

Birkhäuser Verlag · Basel und Stuttgart

UNIVERSITY OF
LIBRARY
JAN 8 '59

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redaktor/Editor/rédacteur: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 12 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 8 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmassstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten, welche einen Umfang von mehr als 16 Seiten aufweisen, haben einen *Satzbeitrag* zu entrichten. Dieser beträgt sFr. 25.- pro Seite von der 17. bis 24. Seite, sFr. 40.- pro Seite von der 25. bis 32. Seite und sFr. 50.- pro Seite von der 33. Seite an. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 12 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 8 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution* of Sw. Frs. 25.- per page for pages 17-24, Sw. Frs. 40.- per page for pages 25-32 and Sw. Frs. 50.- per page for pages 33 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: trois mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés huit semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution* de frs.s. 25.- par page doit être payée pour les pages 17-24 et de frs.s. 40.- par page pour les pages 25-32; à partir de page 33 la contribution est de frs.s. 50.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Schweizer Fr. 58.- (DM 58.-), Einzelnummer sFr. 12.-

Annual subscription (6 issues): Swiss francs 58.- (DM 58.-), single copy Sw.Frs. 12.-

Abonnement annuel (6 numéros): Francs suisses 58.- (DM 58.-), le numéro fr.s. 12.-

Postabonnement - Post-Office Subscription - Abonnement par office postal: Belgien, Dänemark, Finnland, Holland, Italien, Luxemburg, Marokko, Norwegen, Portugal, Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces: $\frac{1}{1}$ Seite/page: Fr./DM 165.- $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr./DM 88.-, $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr./DM 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

1958, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland © Printed in Switzerland

ZAMP VOL. IX (1958)

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik
Journal of Applied Mathematics and Physics
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Volumen IX (1958) der ZAMP erscheint in zwei Teilen, nämlich einerseits als

VOL. IXa

mit 4 Faszikeln zu folgenden Publikationsdaten: *Fasz. 1* am 25. Januar, *Fasz. 2* am 25. Juli, *Fasz. 3* am 25. September und *Fasz. 4* am 25. November 1958, und andererseits als

VOL. IXb

FESTSCHRIFT JAKOB ACKERET

eine 777 Seiten umfassende Doppelnummer *Fasz. 5/6* im Juni 1958.

Die Einzelpreise pro Nummer betragen unverändert Fr. 12.- (DM 12.-), bzw. Fr. 24.- (DM 24.-) für die Doppelnummer.

Volume IX (1958) of ZAMP will be published in two parts,

VOL. IXa

to be issued as follows: *No. 1* on January 25th, *No. 2* on July 25th, *No. 3* on September 25th and *No. 4* on November 25th 1958, whilst

VOL. IXb

FESTSCHRIFT JAKOB ACKERET

will appear as a double issue *No. 5/6* in June 1958, containing 777 pages. The price for a single copy per issue remains unchanged at SFr. 12.- or SFr. 24.- for the double issue.

Volume IX (1958) de ZAMP paraîtra en deux parties,

VOL. IXa

comme suit: *fasc. 1* le 25 janvier, *fasc. 2* le 25 juillet, *fasc. 3* le 25 septembre et *fasc. 4* le 25 novembre 1958, tandis que le

VOL. IXb

FESTSCHRIFT JAKOB ACKERET

sera un fascicule double *No. 5/6*, de 777 pages et paraîtra au mois de juin 1958. Les prix des fascicules restent à frs. 12.- pour le fascicule simple ou à frs. 24.- pour le fascicule double.

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL/STUTTGART

Kennzeichen atmosphärischer Eispartikeln

2. TEIL

Hagelkörner

Von ROLAND LIST, Weissfluhjoch-Davos¹⁾

1. Einleitung

In die Augen fallend waren seit jeher die vielfältigen, zum Teil auch phantastischen Formen und Grössen der Hagelkörner. W. TRABERT [1]²⁾, der 1899 eine vorzügliche Zusammenstellung der damaligen Kenntnisse über die Bildung des Hagels verfasste, erwähnt zum Beispiel Körner mit aufgebauten, bis 14 mm langen Kristalliten; C. KASSNER [2] beschäftigt sich mit der Frage des grössten Hagelkornes der Welt, und S. ERB [3] beschreibt eine Schlosse mit 810 cm³ Verdrängung.

Die Erkenntnis, dass ein schalenartiger Aufbau von den in das Eis eingebauten Luftblasen herrührt, ist bis auf WALLER und HARTING [4] zurückzufolgen. Diese Autoren konnten auch feststellen, dass die Schalen der Hagelkörner «aus einer Anzahl kleinerer, aneinander gereihter Theilchen, kleine Eiskällchen oder Eiszellen, die man deutlich unter dem Mikroskop beim Schmelzen wahrnimmt», bestehen. Diese Beobachtung wurde hundert Jahre später durch R. LIST und M. DE QUERVAIN [5] bestätigt, da sich bei Betrachtung von Dünnschnitten in polarisiertem Licht diese «Eiskällchen oder Eiszellen» mit Eiseinkristallen identifizieren liessen. Die damals erstmals auf Hagelkörner angewendete Dünnschnitttechnik [6] wirkte befruchtend, indem die damit erreichbaren Resultate verschiedene Vermutungen bestätigen, in anderen Fällen aber neue Ergebnisse zeitigten.

Die folgenden Ausführungen basieren auf Sammelproben von über 40 Hagelfällen der Jahre 1953 bis 1957.

¹⁾ Eidgenössisches Institut für Schnee- und Lawinenforschung.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis Seite 234.

2. Charakterisierung

Aussehen. Hagelkörner sind teilweise oder ganz opake Eispartikeln mit einem Durchmesser von rund 5 bis 150 mm und mehr. Die auftretenden Formen sind äusserst vielfältig; der Aufbau ist öfters schalenartig mit einem Wechsel klarer und opaker, weisser Schichten.

Entstehung. Hagelkörner entstehen aus Frostgraupeln oder Klareispartikeln durch Anlagerung und Gefrieren von angeschwebten Wassertropfen [7] (vgl. auch mit MASON [8]).

(Die in der Meteorologie vielfach empfundene Unsicherheit in der Unterscheidung von Frostgraupeln und Hagelkörnern einzig nach einem Grenzdurchmesser von 5 mm [9] kann durch Beachtung einer prinzipiellen Differenz behoben werden: Frostgraupeln sind Partikeln mit einer zonenweisen Verglasung und stellen Verdichtungsformen verschiedener Stadien dar [7]. Sobald der erste auftretende Verdichtungsprozess, ausgehend von der Reifgraupel, beendet ist, das heisst, sobald die angeströmten Wassertropfen ausschliesslich zur Volumenvergrösserung dienen und nicht mehr zur Auffüllung des «Reif»gerüsts, so ist bereits von Hagelkörnern zu sprechen.)

3. Äusserer Aufbau von Hagelkörnern

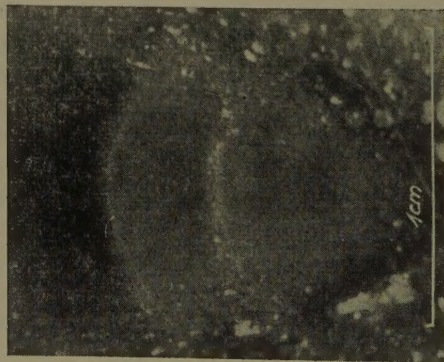
3.1 Ursprung

In Bestätigung des im Artikel *Graupeln als Wachstumszentren von Hagelkörnern* [7] erwähnten Schemas über die Entstehung und den Ursprung von Hagelkörnern, sei auf die Figur 1 verwiesen, die im Innern eines rund 5 cm grossen, ellipsoidischen, in Richtung der kleinsten Achse beidseitig eingedrückten Hagelkornes (Nr. 57.7) deutlich eine ursprüngliche, kugelsektorartige Reifgraupel erkennen lässt. Eine Vergrösserung der Graupel zeigt Figur 2.



Figur 1

Hagelkorn 57.7 mit eingebauter konischer Reifgraupel.



Figur 2

Kegeliges Zentrum des Hagelkornes 57.7.

3.2 Formen und Grössen von Hagelkörnern

Die ausserordentliche Vielfalt der beobachteten Formen lässt folgende Unterteilungen zu:

Hauptform:

- a) Kugel;
- b) Ellipsoid:
 - Rotationsellipsoid;
 - Ellipsoid, dreiaxsig;
 - Ellipsoid, einseitig in der kleinsten Achse eingedrückt;
 - Ellipsoid, beidseitig in der kleinsten Achse eingedrückt;
 - runde Platte;
 - runde Platte mit Wülsten;
 - ovale Platte;
 - ovale Platte mit Wülsten;
- c) Kegel, Kegel auf Kegel;
- d) Schnitz;
- e) unregelmässige Form;
- f) teilweise oder ganz ebenflächige Körper;
- g) zusammengeballte Partikeln;
- h) Splitterformen.

Oberfläche:

- aa) gleichmässig gekrümmt;
- bb) unregelmässig;
- cc) protuberanzenartig;
- dd) stachelig;
- ee) mit aufgebauten Kristalliten.

Zu den zusammengeballt aussehenden Körnern ist zu bemerken, dass der Dünnschnitt unter polarisiertem Licht das einzige sichere Kriterium ergibt, um zu unterscheiden, ob es sich um eine reelle Zusammenpappung verschiedener Eispartikel handelt oder nicht. Alle scheinbar durch Koagulation entstandenen Körner, die auf Weissfluhjoch untersucht wurden, entpuppten sich als ganz gewöhnliche Körner mit *einem* Kern!

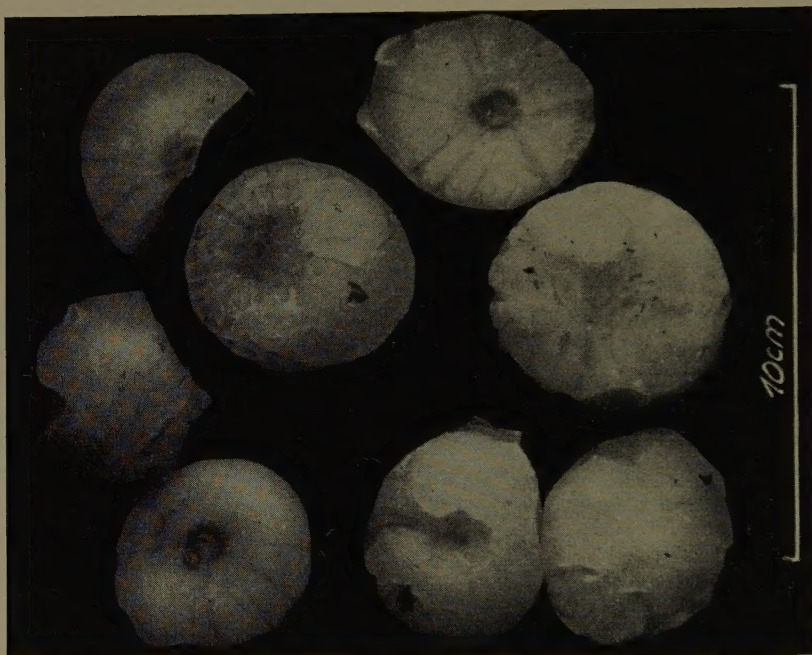
Die in einem einzigen Hagelschlag auftretenden Variationen der Kornformen können äusserst vielfältig sein, wie die Untersuchung der Sammelprobe vom 24. Juni 1953 zeigt [5], oder auch mehr oder weniger homogen gemäss Figuren 3 und 4, die in erster Linie ellipsoidische Formen darstellen.

Grössenverteilungen von Hagelkörnern konnten nur zwei, die den gleichen Hagelschlag vom 5. August 1955 in Balsthal betreffen, gemessen werden; sie sind in Figur 5 aufgezeichnet.



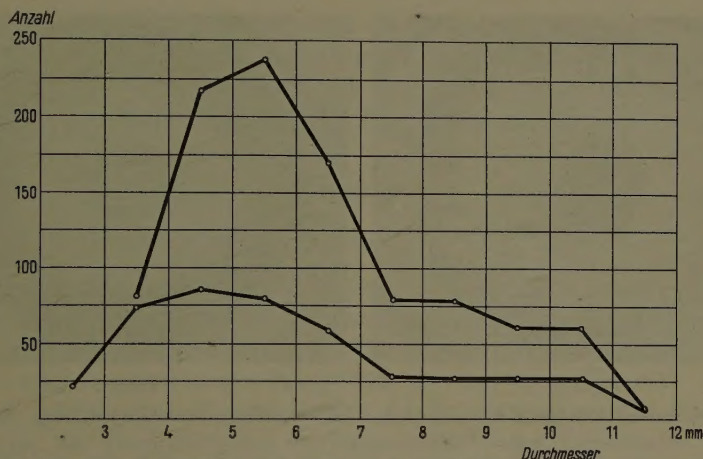
Figur 3

Sammelprobe des Hagelschlages vom 21. Juni 1957 in Fischbach LU.



Figur 4

Sammelprobe des Hagelschlages vom 21. Juni 1957 in Rüti ZH.



Figur 5

Korngrößenverteilung des Hagelschlages vom 5. August 1955 in Balsthal. Totalzahl 990 bzw. 437 Partikeln.

3.3 Dichten von Hagelkörnern

Sämtliche über Auftrieb in Petrol oder Tetralin und Wägung bestimmten Dichten liegen zwischen $0,8$ und $0,9 \text{ g/cm}^3$. Die untere Grenze dürfte sich im allgemeinen noch nach kleineren Werten hin verschieben, da die gesammelten Schlossen vielfach vor der Einbringung in Kühltanks oder -räume oberflächlich mehr oder weniger auftauten.

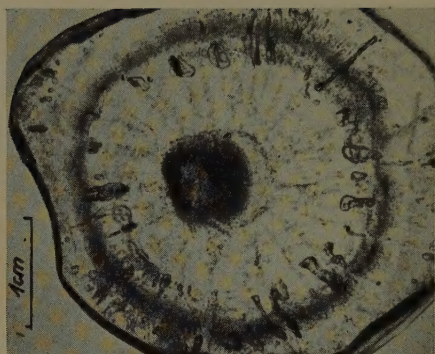
4. Anordnung, Form und Grösse eingebauter Luftblasen

4.1 Schalenanordnung

Schalenanordnungen von Luftblasen in Hagelkörnern sind Kennzeichen für eine Variation der Wachstumsbedingungen. Die Form der Schalenfläche kann kugeligen (Figur 6), ellipsoidischen (Figur 7), kegeligen (Figur 8) oder unregelmässigen Charakter (Figur 9) aufweisen. Die Grössen der schalenbildenden Blasen liegen im Mittel zwischen 2 und 100μ , ihre Form ist kugelig oder unregelmässig, sofern sie teilweise vom ursprünglichen Korngerüst begrenzt werden.

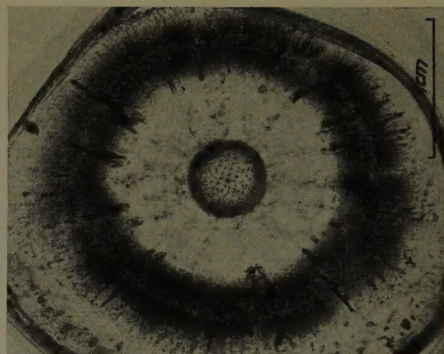
4.2 Reihenanordnung

Vielfach sind in Hagelkörnern neben Schalenanordnungen oder auch allein Reihenanordnungen von Luftblasen festzustellen (Figur 10), deren Auftreten jedoch nicht abhängig ist von einer Änderung der Wachstumsbedingungen.



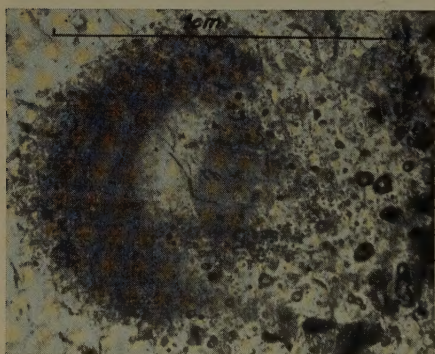
Figur 6

Blasenschale kugelige Form, Korn 57.23.



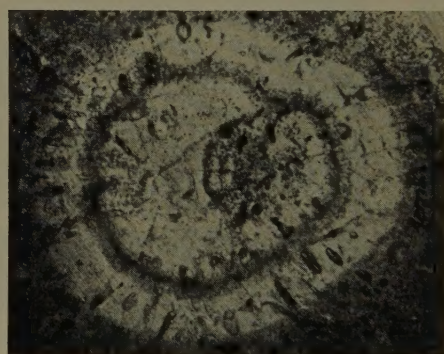
Figur 7

Blasenschale ellipsoidischer Form, Korn 57.22.

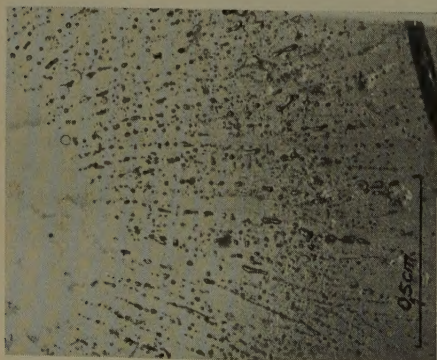


Figur 8

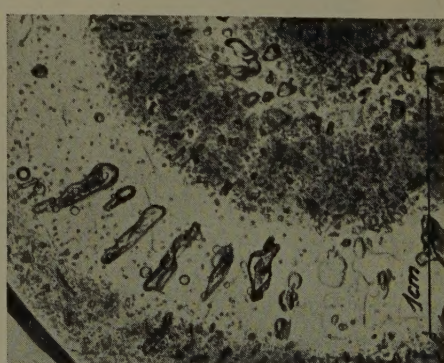
Blasenschale kegelförmiger Form, Korn 57.15, D 1.



Figur 9

Blasenschale unregelmässiger Form,
Korn 57.12, D 1.

Figur 10

Reihenordnung von Luftblasen,
Korn 57.10, D 1.

Figur 11

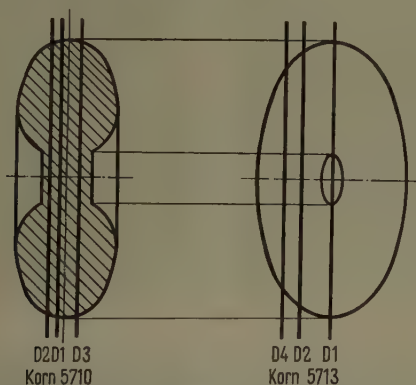
Luftkanäle, Korn 57.16, D 1.

Ihre Richtung ergibt direkt diejenige des Wachstums. Die Durchmesser der reihenbildenden Blasen liegen meist innerhalb 2 und 200 μ . Diese Grössen werden aber überschritten, wenn es sich um radiale Kanäle handelt, die nachträglich am Ende zugefroren sind (als Beispiel siehe Figur 11).

5. Kristallographischer Aufbau

5.1 Bedeutung der Dünnschnittlage im Korn

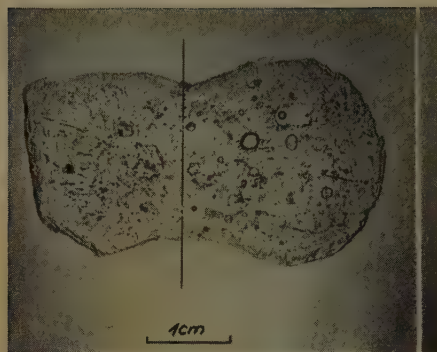
Bei der Auswertung von Einkristallanordnungen ist es von Bedeutung, aus welcher Lage der Dünnschnitt aus dem Hagelkorn herausgesägt wurde. Vergleichbare Verhältnisse sind nur erhältlich, wenn auf Grund der meist zuverlässigen äusseren Symmetrie Hauptschnitte, das heisst Schnitte durch das Zentrum, gelegt werden. Kontrollschnitte helfen dabei diese Hauptschnitte zu bestätigen. Zur Demonstration der dabei auftretenden Eigenheiten seien verschiedene Dünnschnitte durch zwei Körner gleichen Typs dargestellt. Ihre Lagen innerhalb der beidseitig eingedrückten Ellipsoide seien anhand von Figur 12 aufgezeigt.



Figur 12

Darstellungen der Schnittlagen durch die Körner 57.13 bzw. 57.10.

Dünnschnitte von Korn 57.13 (Figuren 13 bis 18), die parallel zur kleinsten und grössten Hauptachse ausgeführt wurden, geben indirekt für den schaligen Kornaufbau Hinweise; währenddem Schnitte durch Korn 57.10 parallel der mittleren und grössten Hauptachse (Figuren 19–24) direkt den gleichen Schluss erlauben. Bei Korn 57.13 ist das Zentrum sicher kegelig, währenddem bei der andern Partikel eine kugelige Graupel als Ursprung angenommen werden kann. Zu Figuren 13 und 14 muss noch die Bemerkung gemacht werden, dass aus technischen Gründen der Dünnschnitt nur durch einen Teil des Kornes gemacht werden konnte; zur besseren Orientierung ist jedoch die Symmetrieachse ein-



Figur 13
Korn 57.13, D 1.



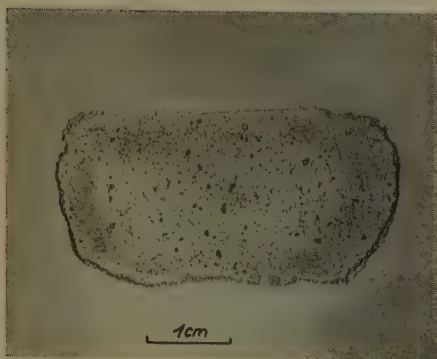
Figur 14
Korn 57.13, D 1, mit polarisiertem Licht.



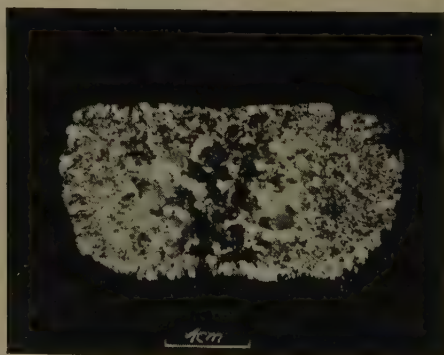
Figur 15
Korn 57.13, D 2.



Figur 16
Korn 57.13, D 2, mit polarisiertem Licht.



Figur 17
Korn 57.13, D 4.

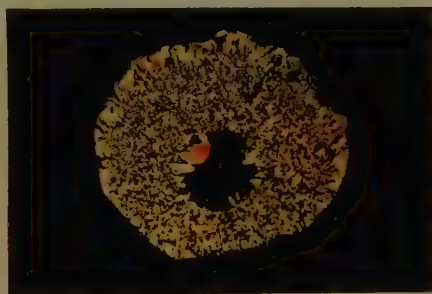


Figur 18
Korn 57.13, D 4, mit polarisiertem Licht.

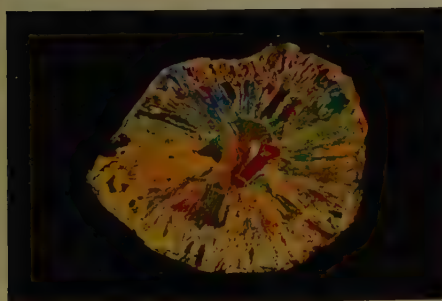
Dünnschnitte von Hagelkörnern in polarisiertem Licht



Dia Nr. 1, Korn 57.A. D 1 (1:1,15).



Dia Nr. 2, Korn 57.B. D 1 (1:1,15).



Dia Nr. 3, Korn 57.10. D 1 (1:1,15).



Dia Nr. 4, Zentrum D 1, Korn 57.15 (1,59:1).

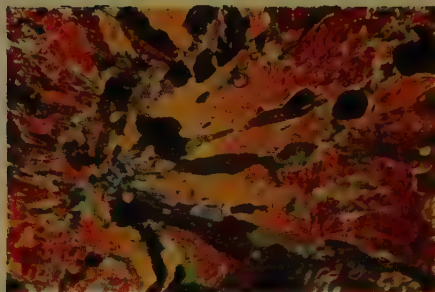


Dia Nr. 5, Zentrum D 2, Korn 57.7 (2,1:1).



Dia Nr. 6, Zentrum D 1, Korn 57.7 (2,1:1).

Dünnschnitte von Hagelkörnern in polarisiertem Licht



Dia Nr. 7, Zentrum D 1, Korn 57.13 (2,1:1).



Dia Nr. 8, Zentrum D 2, Korn 57.13 (2,1:1).



Dia Nr. 9, Zentrum D 3, Korn 57.13 (2,1:1).



Dia Nr. 10, Zentrum D 4, Korn 57.13 (2,1:1).



Dia Nr. 11, Zentrum D 1, Korn 57.11 (2,1:1).



Dia Nr. 12, Zentrum D 2, Korn 57.14 (2,1:1).



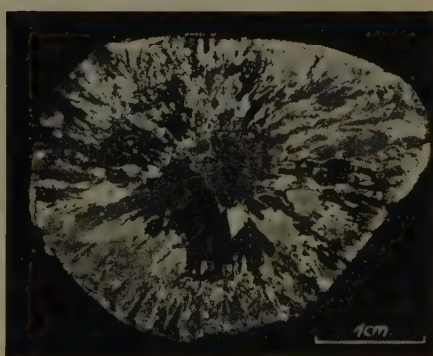
Figur 19
Korn 57.10, D 1.



Figur 20
Korn 57.10, D 1, mit polarisiertem Licht.



Figur 21
Korn 57.10, D 2.



Figur 22
Korn 57.10, D 2, mit polarisiertem Licht.



Figur 23
Korn 57.10, D 3.



Figur 24
Korn 57.10, D 3, mit polarisiertem Licht.

getragen. Vergleichshalber sind jeweils auch die zugehörigen Aufnahmen in durchscheinendem Licht gezeigt.

Die Erfahrung lehrt nun, dass längliche Einkristalle gleich wie Blasenreihen vom Zentrum weg in Richtung des Wachstums zeigen (Figuren 14, 26 und 28). Fällt nun eine Dünnschnittebene nicht in die Hauptebene des untersuchten Kornes, so ergeben sich schleifende Schnitte mit den Einkristallen, was ein Bild gemäss Figur 20 ergibt oder, bei noch grösserer Exzentrizität, zum Teil deutlich zu erkennende Lagen senkrecht zur Wachstumsrichtung (Bildmitte der Figur 24).

5.2 Einkristallanordnung im Wachstumszentrum

Eine Untersuchung des Aufbaues eines Hagelkornes hat stets von seinem Ausgangspunkt, dem sogenannten Wachstumszentrum auszugehen. Vielfach ist zwar dessen Lage bereits aus der Anordnung der Luftblasen ersichtlich, die Betrachtung des kristallinen Aufbaues erst gibt uns eine zwingende Aussage darüber.

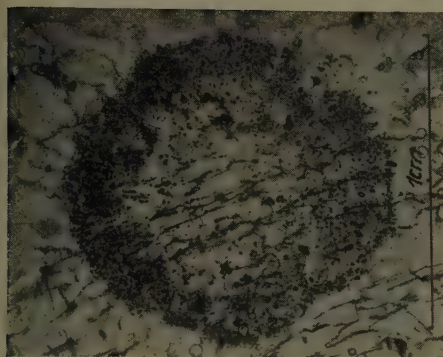
Figuren 27 und 28 gewähren einen Eindruck über das Korn 57.7 (siehe auch Figur 1!), dessen Ausgangspartikel eine Frostgraupel kegeligen Aussehens bzw. eine konische Reifgraupel war. Das Gefühl eines Zentrums mit einer kugeligen Frostgraupel geben dagegen Figuren 29 und 30, währenddem Figuren 31 und 32 wohl einen ursprünglichen Wassertropfen mit einer nicht ganz geschmolzenen kegeligen Reifgraupel im Innern zeigen. Ein einkristallartiges Wachstumszentrum, basierend auf einer Klareispartikel, ist in den Figuren 33 und 34 dargestellt.

5.3 Anordnungen von Einkristallen zweiter und weiterer Generationen

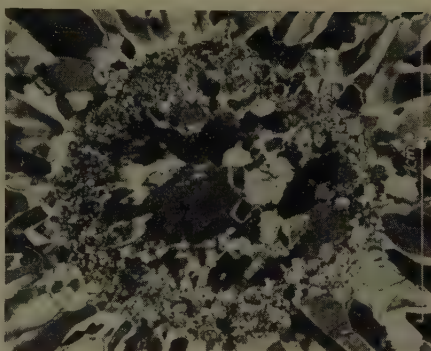
Die Anordnung der Generationen kann derart sein, dass das Wachstumszentrum in der geometrischen Mitte (Figuren 35 und 36), exzentrisch (Figuren 37 und 38) oder auch an der Kornoberfläche liegen kann (Figuren 39 und 40). Die Hauptursache dieser Variation liegt in den speziellen aerodynamischen Verhältnissen beim Wachstum.

5.4 Einkristallgrössen

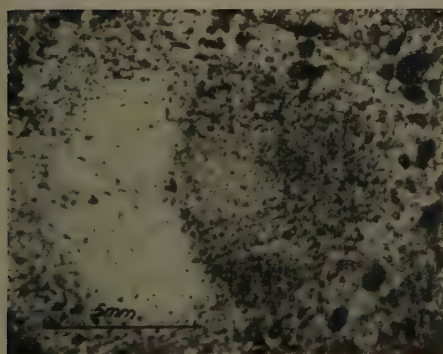
Die Abhängigkeit von der Schnittlage, die Vielfalt der Kornformen und Schalen verunmöglichen es, die in der Dünnschnittechnik normalerweise zu verwendenden Formeln zur Ermittlung der Einkristallgrössen [10] zu gebrauchen. Vergleichbar dürften höchstens mittlere Kornflächen in Hauptschnitten sein! Eine Ausnahme hierzu bilden feinkristalline Zonen (zum Beispiel bei Korn 57.11, D 2, Figur 38), deren Bild mehr oder weniger unabhängig ist von der Exzentrizität. Die für sie ermittelten Korngrössen dürfen auf Werte



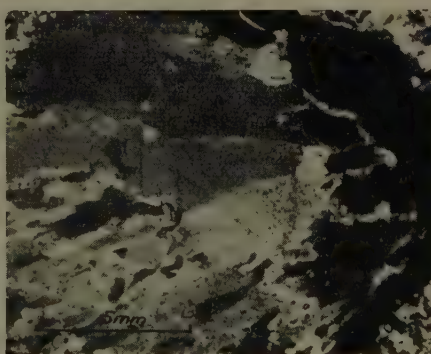
Figur 25
Korn 57.19, D 2.



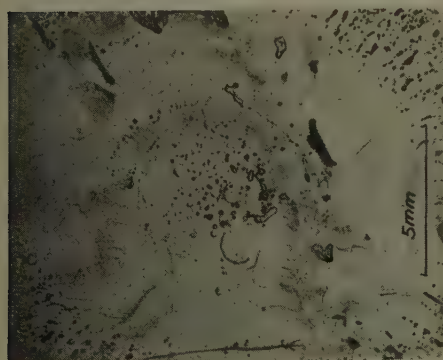
Figur 26
Radial angeordnete Einkristalle, Korn 57.19,
D 2, mit polarisiertem Licht.



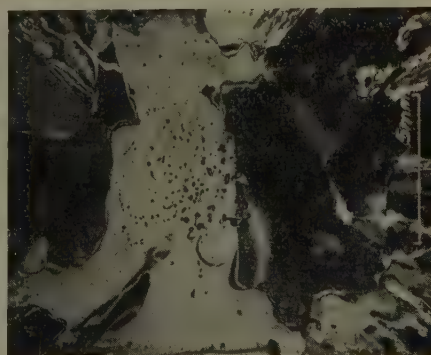
Figur 27
Wachstumszentrum, basierend auf konischer
Reifgraupel, Korn 57.7, D 2.



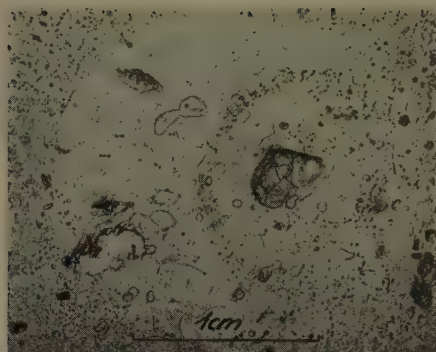
Figur 28
Wachstumszentrum, basierend auf konischer Reif-
graupel, Korn 57.7, D 2, mit polarisiertem Licht.



Figur 29
Wachstumszentrum, basierend auf kugelliger
Frostgraupel, Korn 57.10, D 1.

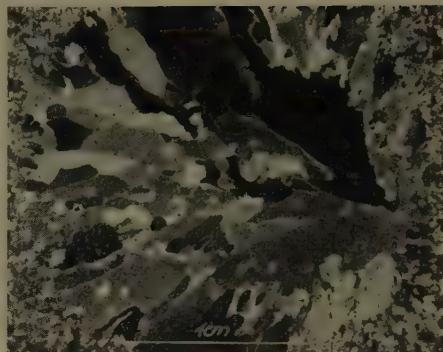


Figur 30
Wachstumszentrum, basierend auf kugelliger Frost-
graupel, Korn 57.10, D 1, mit polarisiertem Licht.



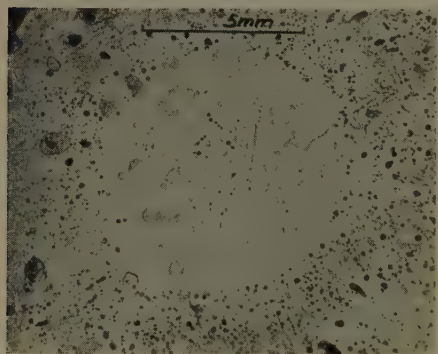
Figur 31

Wachstumszentrum, basierend auf nicht ganz geschmolzener Reifgraupel, Korn 57.A, D 1.



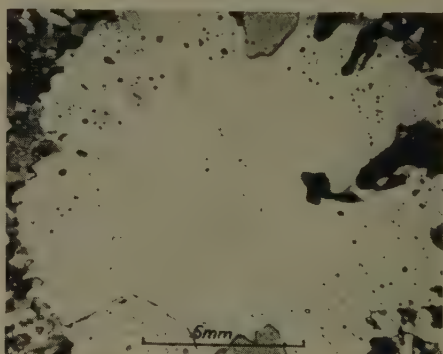
Figur 32

Wachstumszentrum, basierend auf nicht ganz geschmolzener Reifgraupel, Korn 57.A, D 1, mit polarisiertem Licht.



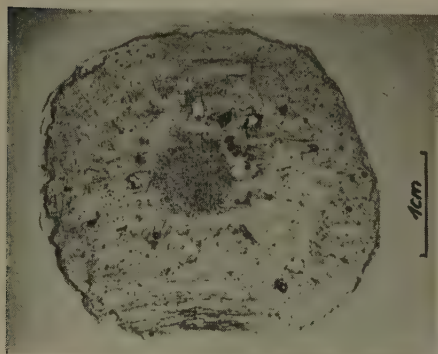
Figur 33

Wachstumszentrum, basierend auf Klareispartikel Typ II, Korn 57.5, D 2.



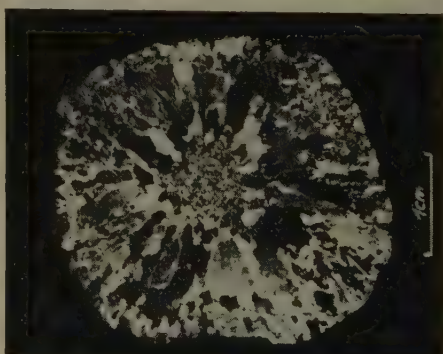
Figur 34

Wachstumszentrum, basierend auf Klareispartikel Typ II, Korn 57.5, D 2, mit polarisiertem Licht.



Figur 35

Wachstumszentrum geometrisch zentrisch, Korn 57.20, D 1.



Figur 36

Wachstumszentrum geometrisch zentrisch, Korn 57.20, D 1, mit polarisiertem Licht.

zwischen 10^{-3} und 10^{-1} mm³ abgeschätzt werden, was für die kleineren den Schluss nahe liegen lässt, dass sie durch ebensogrosse Wolkentropfen ($\sim 100 \mu$) entstanden sein könnten. Mitbestimmend hierzu ist auch die Tatsache der vielen eingebauten Luftblasen der betreffenden Zonen, die auf eine grosse Gefriereschwindigkeit ähnlich wie beim Reifgraupelwachstum schliessen lassen.

5.5 Wirksame Gefrierkerne

Die oben angeführten Hinweise lassen auch die allgemeine Bestimmung der Zahl der wirksamen Gefrierkerne nur für die feinkristallinen Zonen zu; die ermittelte Kerndichte liegt bei 10^5 Partikeln pro Kubikzentimeter Eis, was Luftgehalt von rund 600 wirksamen Gefrierkernen pro Liter Wolkenluft (Wassergehalt 5 g/m³) entspricht, und zwar im fortgeschrittensten Stadium der Hagelbildung!

6. Zusammenhänge zwischen Anordnungen von Luftblasen und Eiskristallen

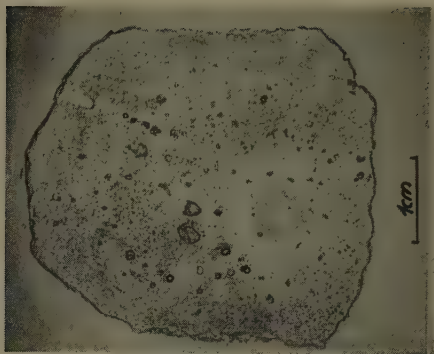
6.1 Relationen zwischen Blasen- und Kristallanordnungen

Vielfach ergibt erst die Synthese der Beobachtungen an Dünnschnitten in polarisiertem und durchscheinendem Licht ein ganz zuverlässiges Bild des Aufbaues eines Hagelkornes.

Am deutlichsten kann die Relation anhand der Figuren 41 und 42 demonstriert werden, wobei ein Vergleich zeigt, dass dem dichten Klareis pallasadenartige Einkristalle, dem mit vielen Blasen durchsetzten Eis feinkristalline Zonen entsprechen. Diese Gegenüberstellungen können auch anhand früher gezeigter Figuren gemacht werden. – Solche Aussagen sind aber nur allgemein gültig unter der Voraussetzung, dass genügend Gefrierkerne und/oder ähnliche Gefriereschwindigkeiten auftreten. Fehlt zum Beispiel die erstgenannte Voraussetzung, so kann das in Figur 20 gezeigte Bild der zonenweise durch Blasen-schalen hindurchdringenden Einkristalle ersichtlich werden.

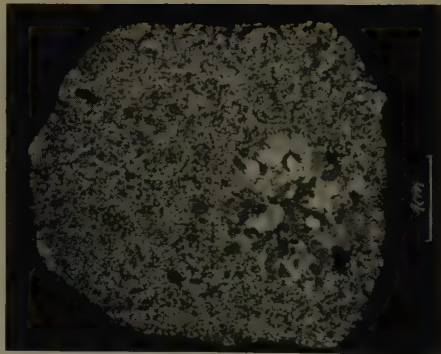
Beobachtungen am Korn 57.11 (Figur 44) in polarisiertem Licht würden auf den ersten Blick keinen Schalenaufbau vermuten lassen, wie er in Figur 43, die in durchscheinender Beleuchtung aufgenommen wurde, erkennbar ist. Blasenflächen brauchen also nicht unbedingt mit einer feinkristallinen Zone gekoppelt zu sein; bei geringer Dicke können sie auch lediglich die Ausgangsfläche neuer Pallasadenkristalle bilden.

Eine Betrachtung der feinkristallinen Zonen in einer etwa 2,5 mm dicken Schicht weist auf Ballungen von Lufteinschlüssen hin (Figur 45), denen auch Gruppierungen von Einkristallen entsprechen (zum Beispiel Figur 46). Dazwischen auftretende Klareiskanäle (Figur 47) sind meist nicht als Einkristallite gefroren (Figur 48); trotzdem dürfte aber eine örtliche Überlagerung zweier



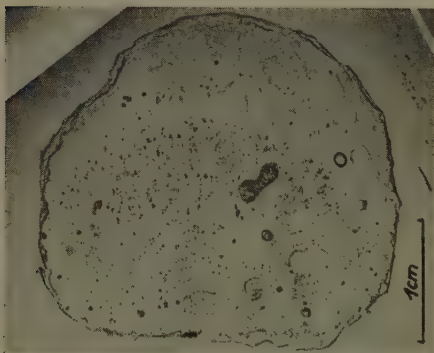
Figur 37

Wachstumszentrum geometrisch exzentrisch,
Korn 57.11, D 2.



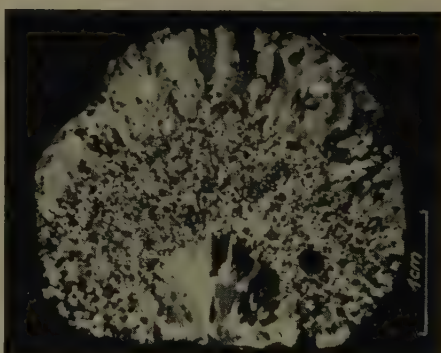
Figur 38

Wachstumszentrum geometrisch exzentrisch,
Korn 57.11, D 2, mit polarisiertem Licht.



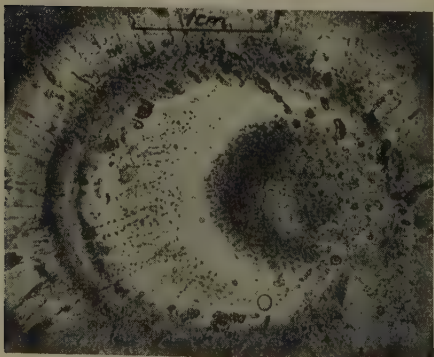
Figur 39

Wachstumszentrum an der Kornoberfläche,
Korn 57.2.



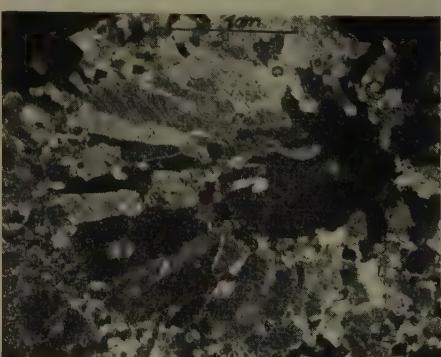
Figur 40

Wachstumszentrum an der Kornoberfläche,
Korn 57.2, mit polarisiertem Licht.



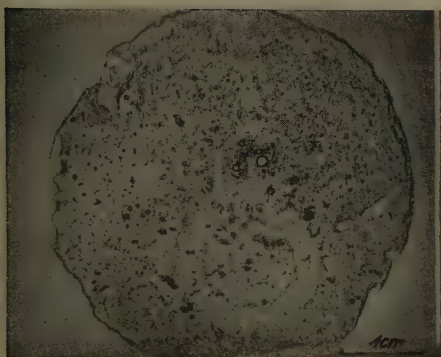
Figur 41

Korn 57.15, D 1.



Figur 42

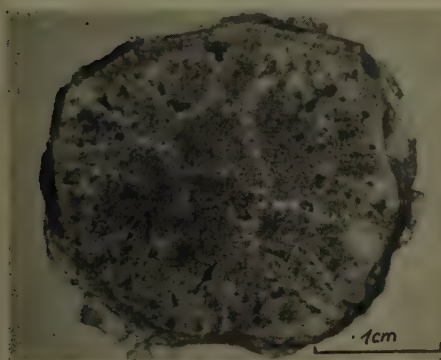
Korn 57.15, D 1, mit polarisiertem Licht.



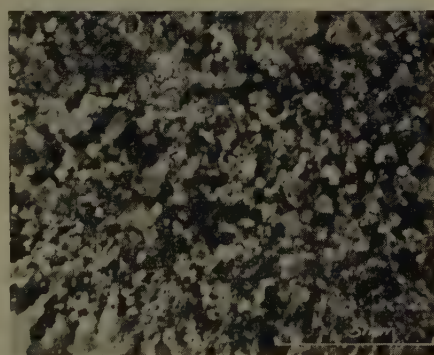
Figur 43
Konzentrische Kugelschalen
des Kornes 57.11, D 1.



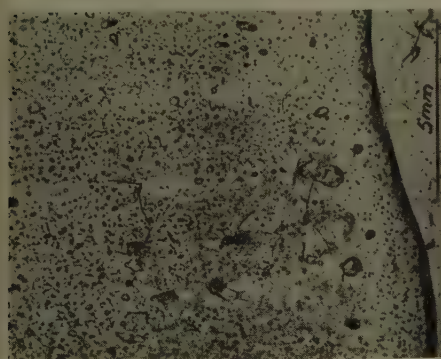
Figur 44
Einkristallanordnung im Zentrum des Kornes
57.11, D 1, mit polarisiertem Licht.



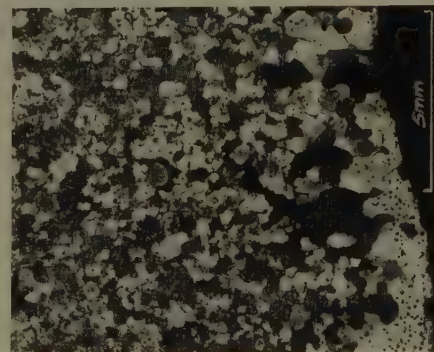
Figur 45
Zusammenballungen von Lufteinschlüssen,
Korn 57.1, D 3.



Figur 46
Einkristallgruppen, Korn 57.1,
mit polarisiertem Licht.



Figur 47
Klareiskanäle, Korn 57.A, D 1.



Figur 48
Entsprechende Einkristallanordnung,
Korn 57.A, D 1, mit polarisiertem Licht.

Wachstumsphasen stattgefunden haben. Es wiederholt sich hier also im Grossen, was in früheren Stadien zu Reifgraupeln und nachher zu Frostgraupeln führte: Es werden zunächst luftige Schichten aufgebaut, zum Teil in Form von Protuberanzen, die später verdichtet und ausnivelliert werden durch Anlage von Wassertropfen bei kleinerer Gefriereschwindigkeit.

6.2 Einbauorte der Luftblasen bezüglich der Korngrenzen

Die Untersuchung, ob der Einbauort der Luftblasen in das Eis abhängig sei von den Einkristallen, ergab keine merkbare Bevorzugung oder Benachteiligung der Kornbegrenzungsflächen.

Für die Unterstützung und Förderung dieser Arbeiten möchte ich vor allem Herrn Dr. M. DE QUERVAIN danken, sowie den verschiedenen Hagelkornsammlern aus der ganzen Schweiz, die durch ihren Einsatz das nötige «Rohmaterial» zur Verfügung stellten und damit diese Arbeit erst ermöglichten.

Die hier beschriebenen Untersuchungen wurden im Rahmen des Forschungsprogrammes der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr an der Forschungsstelle Weissfluhjoch durchgeführt; zur Finanzierung standen teilweise Gelder des Schweizerischen Nationalfonds zur Verfügung.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. TRABERT, *Met. Z.* 10, 433–471 (1899).
- [2] C. KASSNER, *Z. angew. Met.* 47, 255–256 (1936).
- [3] S. ERB, *Alpenhorn 1932* (Langnau BE).
- [4] WALLER und HARTING, *Der Hagel*, aus: *Album der Natuur*, 2. Aufl. (1853), Blatt 33.
- [5] R. LIST und M. DE QUERVAIN, *Z. angew. Math. Phys.* 4, 3–7 (1953).
- [6] R. LIST und M. DE QUERVAIN, demnächst.
- [7] R. LIST, *Z. angew. Math. Phys.* 9a, 180 (1958).
- [8] B. J. MASON, *The Physics of Clouds* (Clarendon Press, Oxford 1957).
- [9] H. WEICKMANN, *The Artificial Stimulation of Rain* (Pergamon Press, London 1957), S. 415.
- [10] H. H. G. JELLINEK, *U. S. Army Snow, Ice and Permafrost Research Establishment*, Report 35.

Summary

Photographs and pictures of thin sections in transparent or polarized light show a number of different possibilities of external and internal structure of hailstones. The relationship between air bubbles in the ice and the single crystals are explained, also in connection with the concentration of the active atmospheric ice nuclei.

(Eingegangen: 21. Januar 1958.)

Über die Darstellung einer Flugbahnschar und ihrer Störungen für Feuerleitgeräte

VON ERNST ROTH-DESMEULES, Luzern

1. Einleitung

Die vorliegende Untersuchung befasst sich mit einer Darstellung der Flugbahnen, wie sie in Feuerleitgeräten der terrestrischen Fliegerabwehr Verwendung finden kann. Aufgabe eines Feuerleitgerätes ist es, aus den gemessenen Positionen eines Flugzeuges dessen zukünftige Bahn zu extrapolieren und entsprechend die Schiesselemente zu liefern, nach denen die Flabkanone zu richten ist. Dies hat zur Voraussetzung, dass ein Rechenggerät vorhanden ist, das die ganze Flugbahnschar erzeugen kann und ausserdem auch alle Störungen einer Flugbahn zu berücksichtigen vermag. Da eine laufende Neuberechnung der Flugbahn auf Grund der Differentialgleichungen unter Beachtung der momentanen Störungen mit den heute zur Verfügung stehenden Rechenautomaten immer noch viel zu zeitraubend ist (abgesehen von deren Umfang und dem taktischen Einsatz) und es sich, genau besehen, ausserdem um ein Randwertproblem mit komplizierten, nichtlinearen Randbedingungen handelt, das einer direkten mathematischen Behandlung noch kaum zugänglich ist, bedeutet dies, dass mindestens vorläufig von schon zum voraus berechneten Flugbahnen ausgegangen werden muss. Es muss daher die ganze Flugbahnschar im Feuerleitgerät gespeichert vorliegen, damit alle Daten in kürzester Zeit zur Verfügung stehen, soll der Zweck erfüllt werden können, was bei den heutigen grossen Flugzeuggeschwindigkeiten bereits ein erhebliches Problem darstellt.

Im folgenden bleiben alle Fragen, die den Aufbau eines Feuerleitgerätes betreffen, insbesondere auch das Problem der Extrapolation des Flugzeugkurses unberührt. Es wird vorausgesetzt, dass der Treffpunkt genau bekannt sei. Es interessiert hier nur die mathematische Form, in der die Flugbahnschar gespeichert werden kann.

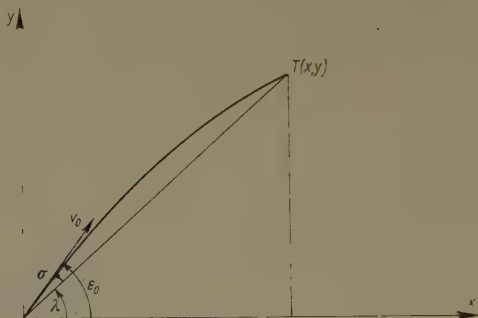
2. Die Flugbahnschar und ihre Parameter

2.1 Die Flugbahnschar

Die Flugbahnen seien auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, das in einer vertikalen Ebene (Schussebene) durch das Geschütz $O(0,0)$ und den Treffpunkt $T(x, y)$ liege (vgl. Figur 1). Nun hängt die Flugbahn von einer

grossen Zahl von Parametern ab, zunächst natürlich von der Zeit t , den Anfangsbedingungen v_0 , ε_0 und weiteren Funktionen, wie der Luftdichte δ , der Lufttemperatur θ , dem Wind w ¹⁾. Die Koordinaten eines Flugbahnpunktes hängen damit von den folgenden Grössen ab:

$$x = x(y, t; v_0, \varepsilon_0; \delta, \theta, w), \quad y = y(y, t; v_0, \varepsilon_0; \delta, \theta, w).$$



Figur 1

Die Flugbahn im Koordinatensystem.

Da die Flugbahnen für eine Standardatmosphäre berechnet werden, ist es zweckmässiger, sie durch die Anfangsbedingungen, die Störungen der Anfangsbedingungen sowie die Abweichungen der wirklichen Atmosphäre zu charakterisieren²⁾:

$$x = x(y, t; v_0, \varepsilon_0; \Delta v_0, \Delta \varepsilon_0, \Delta \delta), \quad y = y(y, t; v_0, \varepsilon_0; \Delta v_0, \Delta \varepsilon_0, \Delta \delta).$$

In einem Feuerleitgerät sind häufig nicht die rechtwinkligen Koordinaten x, y des Treffpunktes vorhanden, sondern seine Polarkoordinaten, nämlich die Entfernung r und der Lagewinkel λ . In diesem Falle gilt entsprechend wie oben

$$r = r(t, v_0, \lambda + \sigma, \Delta v_0, \Delta \sigma, \Delta \delta), \quad \lambda = \lambda(t, v_0, \lambda + \sigma, \Delta v_0, \Delta \sigma, \Delta \delta), \quad (2.1.1)$$

wo der Schusswinkel $\sigma = \varepsilon_0 - \lambda$ ist.

Die Flugbahnschar hängt unter diesen Voraussetzungen von 5 Parametern $t, \sigma, \Delta v_0, \Delta \sigma, \Delta \delta$ ab, da die Anfangsgeschwindigkeit v_0 als eine Konstante betrachtet werden darf.

¹⁾ Im folgenden soll von den Effekten, die normal zur Flugbahn wirken, wie Derivation und Seitenwind, abgesehen werden. Ihre Berücksichtigung im Feuerleitgerät geschieht ohne Schwierigkeiten auf eine entsprechende Weise.

²⁾ Die Temperaturstörung $\Delta \theta$ bleibt im weitem unberücksichtigt, obwohl ihr Einfluss nicht immer vernachlässigbar ist. Ebenso wird auf den Windeinfluss nicht eingegangen; er kann im Prinzip auf eine Störung der Anfangselemente zurückgeführt werden.

2.2 Realisation der Flugbahnschar

Damit stellt sich die Aufgabe, die Flugbahnschar (2.1.1) in Abhängigkeit von ihren Parametern in einer geeigneten Form zu realisieren. Nun ist die mechanische oder elektrische Realisation einer Funktion von fünf Variablen nicht ohne weiteres möglich. Handelt es sich um eine Funktion von nur zwei Variablen, etwa t und ε_0 , dann kann sie durch Kurvenkörper erzeugt werden [2, 4]³⁾. Da deren Herstellung nicht nur kostspielig ist, sondern auch ihre Genauigkeit beschränkt, so sucht man sie zu vermeiden.

Bedeutend einfacher ist es, wenn nur Funktionen mit einer einzigen Variablen auftreten, da diese sowohl mechanisch (Kurvenscheiben, Gelenkwerke [6] usw.) als auch elektrisch (Potentiometer [5], Funktionsdrehkondensatoren) verhältnismässig leicht, genau und zugleich robust hergestellt werden können. – Dies führt zum Problem, die Funktionen (2.1.1) näherungsweise aus Funktionen mit einer Variablen zusammenzusetzen, wobei diese Funktionen noch durch Addition, Subtraktion und Multiplikation verknüpft werden dürfen. Dabei wird man aus Gründen der Betriebssicherheit und der Genauigkeit danach trachten, mit einem Minimum an Rechenelementen auszukommen. Die Aufgabe der Zerlegung in einfache Elemente könnte etwa durch Versuche gelöst werden, doch stösst dies auf manche Schwierigkeiten, weil die Zusammenhänge ziemlich kompliziert sind. Es wurde vorgeschlagen [3], die einzelnen Funktionen auf statistischem Weg zu bestimmen. Im folgenden Abschnitt soll kurz darauf eingegangen werden.

2.3 Statistische Approximation. Eine Alternative

Es soll hier die Grundidee für den Fall einer beliebigen⁴⁾ Funktion $F(x, y)$ mit zwei Variablen angegeben werden. Man macht den Ansatz

$$F(x, y) = X_1^F(x) + Y_1^F(y) + X_2^F(x) \cdot Y_2^F(y) + X_3^F(x) \cdot Y_3^F(y). \quad (2.3.1)$$

Die Funktion $F(x, y)$ sei für die $m \cdot n$ diskreten Werte (x_i, y_j) , ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) gegeben. Man darf dabei voraussetzen, dass der Mittelwert aller gegebenen Funktionswerte null sei (was durch Subtraktion einer Konstanten, des Mittelwertes, von den einzelnen Funktionswerten stets erreichbar ist). Die Methode der kleinsten Quadrate liefert dann für die ersten Glieder

$$X_1^F(x_i) = \frac{1}{n} \sum_j F(x_i, y_j), \quad Y_1^F(y_j) = \frac{1}{m} \sum_i F(x_i, y_j).$$

Sind nun die Reste

$$R(x_i, y_j) = F(x_i, y_j) - [X_1^F(x_i) + Y_1^F(y_j)],$$

³⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 250.

⁴⁾ Es darf sich dabei auch um rein empirisch gegebene Funktionen handeln.

dann folgen die nächsten Glieder aus

$$X_2^F(x_i) = \frac{\sum_j R(x_i, y_j) \cdot Y_1^F(y_j)}{\sum_j [Y_1^F(y_j)]^2}$$

und entsprechend $Y_2^F(y_j)$. Ähnlich können auch die folgenden Glieder X_3^F, Y_3^F erhalten werden.

Die Methode lässt sich auf Funktionen mit mehr als 2 Variablen erweitern, doch wird der Rechenaufwand bald sehr gross, da Summanden mit einer Funktion, mit Kombinationen von zwei, drei und mehr Funktionen auftreten. Kennt man den Einfluss der verschiedenen Glieder einigermaßen, dann lässt sich der allgemeine Ansatz entsprechend verkürzen.

Um zu einem Überblick über den Ansatz zu gelangen, besteht im Falle der Flugbahnen die Möglichkeit⁵⁾, die Tatsache auszunützen, dass die Funktionen als Lösungen von Differentialgleichungen gegeben sind. Allerdings sind diese nichtlinearen Differentialgleichungen 4. Ordnung bei Berücksichtigung aller Einflüsse so kompliziert, dass keine explizite Lösung möglich ist und nur numerische Verfahren zum Ziel führen. Der im folgenden eingeschlagene Weg beruht darauf, die Differentialgleichungen durch approximative zu ersetzen, die eine Lösung durch bekannte Funktionen gestatten, so dass deren Bau leicht zu überblicken ist und Schlüsse über die Form des Ansatzes (2.3.1) gezogen werden können⁶⁾. Dabei ergibt sich sofort noch eine Zerlegung des Problems, da die Normalflugbahnen und die Störungen getrennt behandelt werden dürfen, letztere mit Hilfe der Störungstheorie. – Die Erfahrung zeigt, dass man auf diesem Wege zu Hinweisen gelangt, die den noch erforderlichen Rechenaufwand erheblich verringern.

2.4 Die Differentialgleichungen der Bewegung

Werden nur der Luftwiderstand und das Geschossgewicht berücksichtigt, dann lauten die Differentialgleichungen der ebenen Geschossbewegung [1]

$$\ddot{x} = -W \frac{\dot{x}}{v}, \quad \ddot{y} = -W \frac{\dot{y}}{v} - g, \quad (2.4.1)$$

wo $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ und W die Widerstandsfunktion ist. Vernachlässigt man die Abhängigkeit von der Machschen Zahl und wählt für die Luftdichte einen ex-

⁵⁾ Die andere Möglichkeit, etwa Potenzreihen oder Fourier-Reihen zu Hilfe zu nehmen, scheitert gewöhnlich an der schlechten Konvergenz für grosse Zeiten t .

⁶⁾ Dieser Weg ist offenbar immer dann gangbar, wenn die zu realisierenden Funktionen durch Differentialgleichungen bestimmt sind.

ponentiellen Verlauf, dann gilt für W der Ansatz

$$W = c e^{-a v} v^n, \quad (2.4.2)$$

wo c , a und n Konstanten bedeuten.

Für die Anwendungen bei Feuerleitgeräten wäre es gegeben, die Differentialgleichungen in Polarkoordinaten zu formulieren, um direkt die gewünschten Grössen zu erhalten. Die entsprechenden Gleichungen sind aber wenig übersichtlich.

3. Darstellung der Normalflugbahn

3.1 Lösung der Differentialgleichungen

Die Schwierigkeiten bei der expliziten Lösung des Systems (2.4.1) liegen in der Gestalt der Luftwiderstandsfunktion (2.4.2). Für $a \neq 0$ führt allein der Fall $n = 1$ auf eine lineare Differentialgleichung, deren Lösungen aber insofern nicht explizit angebar sind, als Quadraturen stehenbleiben. Für $a = 0$ ist nur die Geschwindigkeit explizit ausdrückbar, während die Koordinaten wieder durch Quadraturen zu bestimmen sind. Einzig der Fall $n = 1$ führt ans Ziel und soll daher im folgenden allein betrachtet werden⁷⁾.

Durch elementare Rechnungen findet man für $a = 0$ und $n = 1$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ($t = 0$)

$$x = y = 0, \quad \dot{x} = v_0 \cos \varepsilon_0, \quad \dot{y} = v_0 \sin \varepsilon_0$$

die Lösung

$$t = \frac{1}{c} \ln \frac{C - \operatorname{tg} \varepsilon}{C - \operatorname{tg} \varepsilon_0}$$

mit

$$C = \frac{g}{c v_0 \cos \varepsilon_0} + \operatorname{tg} \varepsilon_0$$

und daraus für die Koordinaten

$$x = \frac{v_0 \cos \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}), \quad y = \left[\frac{v_0 \sin \varepsilon_0}{c} + \frac{g}{c^2} \right] (1 - e^{-ct}) - \frac{g}{c} t. \quad (3.1.1)$$

3.2 Ansatz für den Schusswinkel $\sigma(t, \lambda)$

Entsprechend den Überlegungen in Abschnitt 2.3 soll der Schusswinkel $\sigma(t, \lambda)$ durch Funktionen $T_i^\sigma(t)$, $A_j^\sigma(\lambda)$ ($i, j = 1, 2, \dots$) einer einzigen Variablen t

⁷⁾ Diese Vereinfachung ist insofern gerechtfertigt, als im Falle von Überschallgeschwindigkeiten der Ansatz $W = c v^1$ für die gestreckten Flabahnen eine sehr gute Näherung darstellt. Somit ist zu erwarten, dass sich auch über den Aufbau des Ansatzes (2.3.1) weitgehende Aussagen machen lassen, was durch die Erfahrung bestätigt wird.

bzw. λ in der Form

$$\sigma(t, \lambda) = T_1^\sigma(t) + A_1^\sigma(\lambda) + T_2^\sigma(t) \cdot A_2^\sigma(\lambda) + \dots$$

dargestellt werden, wobei natürlich so wenig Glieder als möglich zu verwenden sind.

Aus den Beziehungen (3.1.1) folgt für den Lagewinkel λ

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg} \varepsilon_0 - \left(\frac{t}{1 - e^{-ct}} - \frac{1}{c} \right) \cdot \frac{g}{v_0 \cos \varepsilon_0}.$$

Berücksichtigt man $\varepsilon_0 = \lambda + \sigma$ und beachtet, dass σ im allgemeinen klein ist, dann ergibt sich die für nicht zu grosse Zeiten gültige Näherung

$$\sigma = T_2^\sigma(t) \cos \varepsilon_0 \quad \text{mit} \quad T_2^\sigma(t) = \frac{g}{c v_0} \left(1 - \frac{c t}{1 - e^{-ct}} \right). \quad (3.2.1)$$

In manchen Fällen wird man $\cos \varepsilon_0 \approx \cos \lambda$ setzen dürfen⁸⁾:

$$\sigma = T_2^\sigma(t) \cos \lambda. \quad (3.2.2)$$

Geht man in der Näherung einen Schritt weiter, dann ist

$$\sigma [1 + T_2^\sigma(t) \sin \lambda] = T_2^\sigma(t) \cos \lambda$$

oder auch

$$\sigma = T_2^\sigma(t) \cos \lambda - T_3^\sigma(t) \sin 2 \lambda \quad (3.2.3)$$

mit $T_3^\sigma(t) = [T_2^\sigma(t)]^2/2$.

Die Darstellung (3.2.3) zeigt, dass die ersten Glieder T_1^σ , A_1^σ gar nicht erforderlich sind⁹⁾.

3.3 Ansatz für die Entfernung $r(t, \lambda)$

Für die Entfernung r des Treffpunktes soll in analoger Weise gelten

$$r(t, \lambda) = T_1^r(t) + A_1^r(\lambda) + T_2^r(t) \cdot A_2^r(\lambda) + \dots$$

⁸⁾ Diese Näherung schliesst man bereits aus der Vakuumbahn, für die

$$r = \frac{2 v_0^2}{g} \cdot \frac{1}{\cos^2 \lambda} \cos (\lambda + \sigma) \sin \sigma$$

gilt, woraus

$$\sigma = \frac{g r}{2 v_0^2} \cos \lambda = T_2^r(t) \cos \lambda$$

folgt.

⁹⁾ In der Folge werden die trigonometrischen Funktionen stengelassen, obwohl es häufig zweckmässig sein wird, sie durch leicht davon abweichende Funktionen $A_j(\lambda)$ zu ersetzen.

r kann aus x oder y berechnet werden. Man unterscheidet zweckmässig zwei Fälle

1. $x > y$ (untere Winkelgruppe); 2. $x < y$ (obere Winkelgruppe).

Im ersten Falle eignet sich für r die Darstellung

$$r = \frac{x}{\cos \lambda} = \frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}) \cos \sigma - \frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}) \sin \sigma \operatorname{tg} \lambda. \quad (3.3.1)$$

Bedenkt man die Grössenordnung von σ sowie die Approximation (3.2.2), so erhält man

$$r = \frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}) - \frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}) T_2^\sigma(t) \sin \lambda,$$

woraus man die Form

$$r = T_1^r(t) - T_2^r(t) \sin \lambda \quad (3.3.2)$$

abliest, mit den Abkürzungen

$$T_1^r(t) = \frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}), \quad T_2^r(t) = T_1^r(t) \cdot T_2^\sigma(t).$$

Um die Näherung einen Schritt weiterzutreiben, können in (3.3.1) die ersten Glieder der Reihenentwicklungen von $\cos \sigma$ und $\sin \sigma$ eingeführt werden. Dies liefert

$$r(t, \lambda) = T_1^{*r}(t) - T_2^r(t) \sin \lambda - T_3^r(t) \cos 2\lambda, \quad (3.3.3)$$

wo sich T_1^{*r} und T_3^r durch T_1^r und T_2^σ ausdrücken lassen, womit gegebenenfalls noch Funktionselemente eingespart werden können¹⁰⁾. Jedenfalls lehrt die Darstellung (3.3.3) sofort, dass eine Funktion $A_1^r(\lambda)$ nicht auftritt.

Für den Fall des oberen Winkelbereiches ergibt sich r aus $r = y/\sin \lambda$. In einer ersten Näherung folgt wieder die Beziehung (3.3.2) mit denselben Funktionen. Entsprechend kann man die Darstellung um ein weiteres Glied $T_3^r \cdot A_3^r$ ergänzen.

4. Ansatz für die Störungen der Flugbahn

4.1 Die allgemeinen Störungsdifferentialgleichungen

Die Flugbahnen sind für Normalbedingungen berechnet, von denen die wirklichen Verhältnisse mehr oder weniger stark abweichen können. Solche Störungen sind Änderungen des Elevationswinkels ε_0 , der Anfangsgeschwindigkeit v_0 , Abweichungen der Luftdichte vom Standardverlauf, Wind usw.

¹⁰⁾ Sollte noch ein Ausdruck mit $\cos \lambda$ erforderlich sein, dann kann dieser mit $T_2^r \sin \lambda$ zu einem Glied $T_2^{*r} \sin(\lambda - \lambda_0)$ vereinigt werden.

Sind die Störungen klein, dann können die Abweichungen des Ortes vom Normalort in erster Näherung mit Hilfe der Störungstheorie berechnet werden.

Es seien zunächst nur die Störungen von c und v_0 betrachtet, und zwar seien die neuen Werte $c + \gamma$ und $v_0 + \Delta v_0$. Für die gestörten Koordinaten der Flugbahnpunkte gelte

$$X = x + \xi, \quad Y = y + \eta, \quad (4.1.1)$$

wo ξ und η die Verschiebungen des Flugbahnpunktes bedeuten. Nun erfüllen X und Y auch die Differentialgleichungen (2.4.1). Mit Hilfe des Luftwiderstandsgesetzes (2.4.2) können beispielsweise durch Reihenentwicklung die zugehörigen Variationsgleichungen abgeleitet werden. Nach einer längeren Rechnung folgen für ξ und η die linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \xi &= -c e^{-ay} v^{n-1} \left\{ \left[(n-1) \frac{\dot{x}^2}{v^2} + 1 \right] \dot{\xi} + (n-1) \frac{\dot{x} \dot{y}}{v^2} \dot{\eta} - a \dot{x} \eta + \frac{\gamma}{c} \dot{x} \right\}, \\ \eta &= -c e^{-ay} v^{n-1} \left\{ (n-1) \frac{\dot{x} \dot{y}}{v^2} \dot{\xi} + \left[(n-1) \frac{\dot{y}^2}{v^2} + 1 \right] \dot{\eta} - a \dot{y} \eta + \frac{\gamma}{e} \dot{y} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Diese Differentialgleichungen, in die \dot{x} und \dot{y} als Lösungen von (2.4.1) eingehen, lassen keine explizite Integration durch bekannte Funktionen zu, so dass man auf numerische Methoden angewiesen ist.

Selbst im Falle $n = 1$, für den sich die Gleichungen erheblich vereinfachen, ist diese Vereinfachung nicht wesentlich. Aus diesem Grunde soll weiterhin nur der Spezialfall $n = 1$, $a = 0$ betrachtet werden, um explizite Lösungen zu erhalten. Auf diese Weise kann die Form der zu approximierenden Funktionen genauer untersucht werden.

4.2 Explizite Lösung für den Fall $n = 1$, $a = 0$

Obwohl in diesem Falle für die Normalflugbahn eine konstante Luftdichte δ vorausgesetzt wird, lassen sich Dichtestörungen $\Delta\delta$ berücksichtigen, da zufolge der Beziehung

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{\Delta c}{c}$$

die Dichtestörungen als Störungen des ballistischen Koeffizienten c aufgefasst werden können. Es sollen die folgenden Störungen berechnet werden:

1. Störung der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \rightarrow v_0 + \Delta v_0$;
2. Störung des Elevationswinkels $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_0$;
3. Störung des ballistischen Koeffizienten $c \rightarrow c + \gamma$.

Die Variationsgleichungen (4.1.2) nehmen nun die einfache Gestalt an:

$$\ddot{\xi} + c \dot{\xi} = -\gamma \dot{x}, \qquad \ddot{\eta} + c \dot{\eta} = -\gamma \dot{y}. \qquad (4.2.1)$$

Die inhomogenen Glieder mit \dot{x} und \dot{y} sind nach (3.1.1) bekannte Funktionen der Zeit. Die drei erwähnten Fälle unterscheiden sich durch die Anfangsbedingungen und die inhomogenen Glieder.

4.2.1 *v₀-Störung.* Das System (4.2.1) ist mit $\gamma = 0$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen für $t = 0$

$$\xi(0) = \eta(0) = 0, \qquad \dot{\xi}(0) = \Delta v_0 \cos \varepsilon_0, \qquad \dot{\eta}(0) = \Delta v_0 \sin \varepsilon_0$$

zu lösen. Es ergibt sich

$$\xi_{v_0} = \frac{\cos \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta v_0, \qquad \eta_{v_0} = \frac{\sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta v_0. \qquad (4.2.2)$$

4.2.2 *ε₀-Störung.* In diesem Falle ist $\gamma = 0$, und die Anfangsbedingungen lauten ($t = 0$)

$$\xi(0) = \eta(0) = 0, \qquad \dot{\xi}(0) = -v_0 \sin \varepsilon_0 \Delta \varepsilon_0, \qquad \dot{\eta}(0) = +v_0 \cos \varepsilon_0 \Delta \varepsilon_0.$$

Die Lösung ist

$$\xi_{\varepsilon_0} = -\frac{v_0 \sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta \varepsilon_0, \qquad \eta_{\varepsilon_0} = +\frac{v_0 \cos \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta \varepsilon_0. \qquad (4.2.3)$$

4.2.3 *c-Störung.* Die Differentialgleichungen (4.2.1) lauten, ausführlich geschrieben,

$$\ddot{\xi} + c \dot{\xi} = -\gamma v_0 \cos \varepsilon_0 e^{-ct}, \qquad \ddot{\eta} + c \dot{\eta} = -\gamma \left(\frac{g}{c} + v_0 \sin \varepsilon_0 \right) e^{-ct} + \gamma \frac{g}{c}.$$

Anfangsbedingungen für $t = 0$

$$\xi(0) = \eta(0) = 0, \qquad \dot{\xi}(0) = \dot{\eta}(0) = 0.$$

Als Lösung findet man

$$\left. \begin{aligned} \xi_\gamma &= -\frac{v_0 \cos \varepsilon_0}{c^2} [(1 - e^{-ct}) - c t e^{-ct}] \gamma, \\ \eta_\gamma &= \left\{ -\frac{v_0 \sin \varepsilon_0}{c^2} [(1 - e^{-ct}) - c t e^{-ct}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{c^3} [c t (e^{-ct} + 1) - 2 (1 - e^{-ct})] \right\} \gamma. \end{aligned} \right\} \qquad (4.2.4)$$

4.2.4 *Folgerungen.* Aus den Lösungen (4.2.2) und (4.2.3) ergeben sich ohne weiteres zwei bemerkenswerte Beziehungen für die durch die Störungen Δv_0 und $\Delta \varepsilon_0$ bewirkten Verschiebungen des Treffpunktes T .

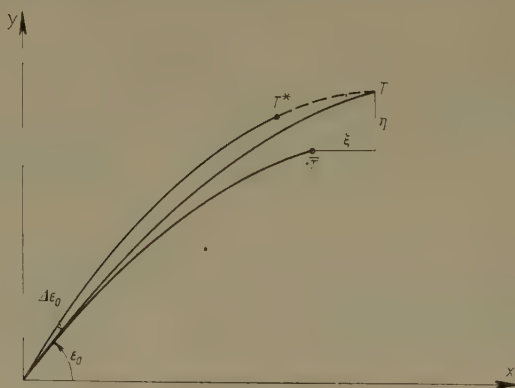
Satz 1. *Ist der Luftwiderstand proportional zur Geschwindigkeit und die Luftdichte konstant, dann ist die durch eine Störung Δv_0 der Anfangsgeschwindigkeit bewirkte Verschiebung des Treffpunktes parallel zur Abschussrichtung.*

Satz 2. *Unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 1 ist die durch eine Störung $\Delta \varepsilon_0$ des Elevationswinkels bedingte Verschiebung des Treffpunktes normal zur Abschussvorrichtung.*

Näherungsweise gelten diese Eigenschaften der Treffpunktverschiebung auch für die allgemeinen (empirischen) Luftwiderstandsgesetze¹¹⁾.

4.3 Die Korrekturen im Falle einer v_0 -Störung

4.3.1 *Die Korrekturen Δt_{v_0} und $\Delta \varepsilon_{v_0}$.* Unter dem Einfluss einer Störung gelangt das Geschoss in der Zeit t nicht nach dem Punkt $T(x, y)$, sondern nach $\bar{T}(\bar{X}, \bar{Y})$. Soll es wiederum durch den Punkt T gehen, dann muss es unter dem Winkel $\varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_0$ abgefeuert werden und wird dabei die Zeit $t + \Delta t$ benötigen



Figur 2

Die gestörte und die korrigierte Flugbahn.

(vgl. Figur 2). Zu einer gegebenen Störung Δv_0 sind nun die Korrekturen $\Delta \varepsilon_{v_0}$ und Δt_{v_0} zu berechnen. Es gilt in erster Näherung

$$-\xi = \dot{X} \Delta t, \quad -\eta = \dot{Y} \Delta t, \quad (4.3.1)$$

¹¹⁾ Man überzeugt sich leicht, dass die Sätze 1 und 2 auch für die Flugbahn im Vakuum gelten.

wobei die Störungen ξ und η durch die folgenden Ausdrücke gegeben sind:

$$\xi = \xi_{v_0} + \xi_{\varepsilon_0}, \quad \eta = \eta_{v_0} + \eta_{\varepsilon_0}, \quad (4.3.2)$$

und weiter ist

$$\dot{X} = \dot{x} + \dot{\xi}_{v_0} + \dot{\xi}_{\varepsilon_0}, \quad \dot{Y} = \dot{y} + \dot{\eta}_{v_0} + \dot{\eta}_{\varepsilon_0}. \quad (4.3.3)$$

Werden die Beziehungen (4.2.2) und (4.2.3) unter Beachtung von (4.3.2) und (4.3.3) in die Gleichungen (4.3.1) eingesetzt, dann bestimmen sich die unbekannten Grössen Δt_{v_0} und $\Delta \varepsilon_{v_0}$ aus dem folgenden Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{v_0 \sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta \varepsilon_0 + (v_0 + \Delta v_0) \cos \varepsilon_0 e^{-ct} \Delta t \\ & \quad - v_0 \sin \varepsilon_0 e^{-ct} \Delta \varepsilon_0 \Delta t = \frac{\cos \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta v_0, \\ & - \frac{v_0 \cos \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta \varepsilon_0 + \left[(v_0 + \Delta v_0) \sin \varepsilon_0 e^{-ct} - \frac{g}{c} (1 - e^{-ct}) \right] \Delta t \\ & \quad + v_0 \cos \varepsilon_0 e^{-ct} \Delta \varepsilon_0 \Delta t = \frac{\sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta v_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.4)$$

Da $\Delta \varepsilon_0$ und Δt kleine Grössen sind, dürfen – wie eine Abschätzung zeigt – in (4.3.4) die quadratischen Glieder ohne nennenswerten Fehler weggelassen werden¹²⁾.

Als Lösung findet man die folgenden Korrekturen

$$\Delta t_{v_0} = - \frac{\frac{1}{c} (1 - e^{-ct})}{v_0 e^{-ct} - \frac{g \sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct})} \Delta v_0 \quad (4.3.5)$$

und

$$\Delta \varepsilon_{v_0} = - \frac{\frac{g}{v_0} \cos \varepsilon_0 \frac{1}{c} (1 - e^{-ct})}{v_0 e^{-ct} - \frac{g \sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct})} \Delta v_0. \quad (4.3.6)$$

Man erkennt sofort, dass zwischen den beiden Werten die einfache Relation

$$\Delta \varepsilon_{v_0} = \frac{g}{v_0} \cos \varepsilon_0 \Delta t_{v_0} \quad (4.3.7)$$

besteht. Sie kann dazu benützt werden, um aus der Kenntnis der einen Korrektur sofort auf einfache Weise die andere Korrektur zu berechnen.

¹²⁾ Dies läuft darauf hinaus, im System (4.3.1) \dot{X} durch \dot{x} und ebenso \dot{Y} durch \dot{y} zu ersetzen, was im allgemeinen eine zulässige Approximation ist.

4.3.2 *Approximation durch Funktionen mit einer Variablen.* Um nun die Korrekturen analog wie die Flugbahnelemente durch Entwicklungen von der Form (2.3.1) darzustellen, werde (4.3.5) in eine Reihe entwickelt. Es wird

$$\Delta t_{v_0} = -\frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}) \frac{e^{ct}}{v_0} \left[1 + \frac{g \sin \varepsilon_0}{c v_0} (e^{ct} - 1) + \dots \right] \frac{\Delta v_0}{v_0}.$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$T_1^{v_0}(t) = \frac{e^{ct}}{v_0}, \quad T_2^{v_0}(t) = \frac{g}{v_0^2 c} (e^{2ct} - e^{ct})$$

kann man dafür

$$\Delta t_{v_0} = -T_1'(t) [T_1^{v_0}(t) + T_2^{v_0}(t) \sin \varepsilon_0 + \dots] \frac{\Delta v_0}{v_0} \quad (4.3.8)$$

setzen. Führt man anstelle des Elevationswinkels ε_0 den Lagewinkel λ ein, so ergibt sich die weitere Darstellung

$$\Delta t_{v_0} = -T_1'(t) [T_1^{*v_0}(t) + T_2^{v_0}(t) \sin \lambda + T_3^{*v_0}(t) \cos 2\lambda] \frac{\Delta v_0}{v_0} \quad (4.3.9)$$

mit den Funktionen

$$T_1^{*v_0}(t) = T_1^{v_0}(t) + \frac{1}{2} T_2^{v_0}(t) \cdot T_2^\sigma(t), \quad T_3^{*v_0}(t) = \frac{1}{2} T_2^{v_0}(t) \cdot T_2^\sigma(t).$$

In manchen Fällen wird die einfachere Form

$$\Delta t_{v_0} = -T_1'(t) [T_1^{v_0}(t) + T_2^{v_0}(t) \sin \lambda] \frac{\Delta v_0}{v_0} \quad (4.3.8^*)$$

ausreichen.

Wie die Darstellungen (4.3.8) und (4.3.9) zeigen, lässt sich die früher in (3.3.2) schon aufgetretene Funktion $T_1'(t)$ als Faktor abspalten, was natürlich eine Vereinfachung bedeutet.

Die Korrektur des Schusswinkels σ folgt aus (4.3.8) sofort mit Hilfe der Beziehung (4.3.7)

$$\Delta \sigma_{v_0} = -T_1'(t) \frac{g}{v_0} \cos \varepsilon_0 [T_1^{v_0}(t) + T_2^{v_0}(t) \sin \varepsilon_0 + \dots] \frac{\Delta v_0}{v_0}. \quad (4.3.10)$$

4.3.3 *Der Fall grosser Störungen Δv_0 .* Da in der Praxis oft Störungen auftreten, für die die lineare Störungstheorie nicht mehr ausreichend ist, so können in einfacher Art und im allgemeinen genügend genau noch in Δv_0 quadratische Glieder hinzugefügt werden, indem man setzt

$$\Delta t_{v_0} = -T_1'(t) [T_1^{v_0}(t) + \dots] \Phi \left(\frac{\Delta v_0}{v_0} \right)$$

mit

$$\Phi\left(\frac{\Delta v_0}{v_0}\right) = \frac{\Delta v_0}{v_0} + \alpha \left(\frac{\Delta v_0}{v_0}\right)^2, \quad (4.3.11)$$

wo α eine Konstante bedeutet.

4.3.4 *Die Distanzkorrektur Δr_{v_0} .* Unter Umständen ist es vorteilhaft, auch die Korrektur der Zielentfernung einzuführen

$$r^*(t + \Delta t, \lambda) = r(t, \lambda) + \Delta r_{v_0}(t, \lambda).$$

Hier bedeutet r^* die gemessene Distanz. Daraus lässt sich direkt die korrigierte Flugzeit entnehmen.

Um Δr_{v_0} zu erhalten, geht man am besten von der Beziehung

$$\Delta r_{v_0} \approx \frac{\xi}{\cos \lambda} \approx \frac{\xi}{\cos \varepsilon_0}$$

aus, wo wegen (4.2.2) und (4.2.3)

$$\xi = \xi_{v_0} + \xi_{\varepsilon_0} = \cos \varepsilon_0 T_1^r(t) \frac{\Delta v_0}{v_0} - \sin \varepsilon_0 T_1^r(t) \Delta \varepsilon_0$$

zu setzen ist. Mit (4.3.10) folgt schliesslich

$$\Delta r_{v_0} = T_1^r(t) [1 + T_1^{\Delta r}(t) + T_2^{\Delta r}(t) \sin \lambda] \frac{\Delta v_0}{v_0}. \quad (4.3.12)$$

Es bedeutet

$$T_1^{\Delta r}(t) = \frac{g}{v_0} T_1^r(t) T_1^{v_0}(t) \quad \text{und} \quad T_2^{\Delta r}(t) = \frac{g}{v_0} T_1^r(t) T_2^{v_0}(t).$$

Entwickelt man in den Ausdrücken auf der rechten Seite noch die Exponentialfunktionen nach der Zeit, so erkennt man, dass die Reihen erst mit t^1 beginnen, so dass meist mit genügender Genauigkeit

$$\Delta r_{v_0} = T_1^r(t) \left[1 + \frac{g}{v_0} t + \frac{g}{v_0^2} t \sin \varepsilon_0 \right] \frac{\Delta v_0}{v_0} \quad (4.3.13)$$

gesetzt werden darf.

Auch hier lässt sich natürlich für den Fall grosser Geschwindigkeitsänderungen Δv_0 als Faktor auf der rechten Seite ein quadratischer Ausdruck

$$\Phi = \frac{\Delta v_0}{v_0} + \alpha \left(\frac{\Delta v_0}{v_0}\right)^2$$

setzen. Erwähnenswert ist, dass in den obigen Darstellungen wiederum der Faktor $T_1^r(t)$ auftritt.

4.4 Die Korrekturen im Falle einer c -Störung

4.4.1 Die Korrekturen Δt_γ und $\Delta \varepsilon_\gamma$. Für die zu einer gegebenen Änderung γ des ballistischen Koeffizienten c erforderlichen Korrekturen Δt_γ und $\Delta \varepsilon_\gamma$ gelten die zu (4.3.1) analogen Beziehungen

$$-\dot{\xi} = \dot{X} \Delta t, \quad -\dot{\eta} = \dot{Y} \Delta t, \quad (4.4.1)$$

wobei in diesem Falle

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_{\varepsilon_0} + \xi_\gamma, & \eta &= \eta_{\varepsilon_0} + \eta_\gamma, \\ \dot{X} &= \dot{x} + \dot{\xi}_{\varepsilon_0} + \dot{\xi}_\gamma, & \dot{Y} &= \dot{y} + \dot{\eta}_{\varepsilon_0} + \dot{\eta}_\gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.4.2)$$

zu setzen ist.

Führt man die Ausdrücke (4.2.3) und (4.2.4) ein, dann ergibt sich ein Gleichungssystem, das nach der Unterdrückung der kleinen quadratischen Glieder die Form

$$\left. \begin{aligned} A \sin \varepsilon_0 \Delta \varepsilon_\gamma - a \cos \varepsilon_0 \Delta t_\gamma &= B \cos \varepsilon_0 \gamma \\ A \cos \varepsilon_0 \Delta \varepsilon_\gamma + \left(a \sin \varepsilon_0 - \frac{g}{v_0} \right) \Delta t_\gamma &= -(B \sin \varepsilon_0 + G) \gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

annimmt, mit Koeffizienten A, B, G und a , die Funktionen der Zeit sind. Nach einer längeren Rechnung findet man für die Zeitkorrektur

$$\Delta t_\gamma = \frac{\frac{1}{c^2} [1 - e^{-ct} - ct e^{-ct}] - \frac{g \sin \varepsilon_0}{v_0 c^3} [ct(e^{-ct} + 1) - 2(1 - e^{-ct})]}{e^{-ct} - \frac{g \sin \varepsilon_0}{v_0 c} (1 - e^{-ct})} \gamma \quad (4.4.4)$$

und für die Korrektur des Schusswinkels

$$\Delta \varepsilon_\gamma = \frac{g \cos \varepsilon_0}{c^2 v_0} \cdot \frac{e^{ct} - e^{-ct} - 2ct}{(1 - e^{-ct}) \left[1 - \frac{g \sin \varepsilon_0}{v_0 c} (e^{ct} - 1) \right]} \gamma. \quad (4.4.5)$$

Für den letzten Ausdruck lässt sich auch

$$\Delta \varepsilon_\gamma = \frac{2g \cos \varepsilon_0}{c^2 v_0} \cdot \frac{\sinh ct - ct}{\sinh ct - (1 + 2k)(\cosh ct - 1)} \gamma$$

schreiben, wo $k = g \sin \varepsilon_0 / v_0 c$ bedeutet.

4.4.2 Approximation durch Funktionen einer Variablen. Die Entwicklung des Ausdruckes (4.4.5) nach Potenzen von t liefert

$$\Delta \varepsilon_\gamma = \cos \varepsilon_0 \frac{g}{v_0} \left[\frac{1}{3} t^2 + \frac{cH}{6} t^3 + \frac{c^2}{180} (15H^2 - 7) t^4 + \dots \right] \gamma \quad (4.4.6)$$

mit $H = 1 + 2k$.

Bemerkenswert ist, dass die Reihe erst mit t^2 beginnt. Konkrete Beispiele lehren, dass bereits das erste Glied eine sehr gute Näherung darstellt, so dass man in den meisten Fällen für die Schusswinkelkorrektur

$$\Delta \varepsilon_\gamma = k_2 t^2 \cos \varepsilon_0 \frac{\gamma}{c} \quad (4.4.7)$$

setzen darf.

4.4.3 Die Distanzkorrektur Δr_γ . Die Distanzkorrektur ergibt sich aus

$$\Delta r_\gamma \approx \frac{\xi}{\cos \lambda} \approx \frac{\xi}{\cos \varepsilon_0}.$$

Setzt man (4.4.7) in (4.2.3) ein, dann folgt zusammen mit der Beziehung (4.2.4) die Formel

$$\Delta r_\gamma = -T_1'(t) [T_1^\gamma(t) + k_2 t^2 \sin \varepsilon_0] \frac{\gamma}{c}. \quad (4.4.8)$$

Es ist $T_1^\gamma = c t / (e^{c t} - 1)^{13}$ und $T_2^\gamma = k_2 t^2$.

Die Formel (4.4.8) zeigt auch diesmal wieder das Auftreten des Faktors $T_1'(t)$.

Sind die Störungen γ/c gross, wie dies gelegentlich auftreten kann, dann lässt sich dies durch die Einführung eines quadratischen Ausdruckes

$$\Psi\left(\frac{\gamma}{c}\right) = \frac{\gamma}{c} + \beta \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2$$

berücksichtigen; damit wird eine Näherung erzielt, die praktisch ausreichend ist.

5. Ergebnis

Benützt man die Differentialgleichungen der Geschossbewegung mit einem näherungsweise gültigen Luftwiderstandsgesetz, das eine explizite Lösung gestattet, dann lassen sich daraus wichtige Hinweise gewinnen für die zum Aufbau von Flugbahnrechnern in Feuerleitgeräten benötigten Darstellungen der verschiedenen Grössen durch Funktionen einer einzigen Variablen. Für die wichtigsten Bahnelemente ergeben sich dabei die folgenden Formeln, die auch die Fälle grossen, nicht mehr linearer Störungen erfassen⁹⁾

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t, \lambda) = T_1'(t) - T_2'(t) \sin \lambda - T_2'(t) \cos 2 \lambda, \\ \Delta r_{v_0} = T_1'(t) [1 + T_1^{Ar}(t) + T_2^{Ar}(t) \sin \lambda] \Phi\left(\frac{\Delta v_0}{v_0}\right), \\ \Delta r_\gamma = -T_1'(t) [T_1^\gamma(t) + k_2 t^2 \sin \varepsilon_0] \Psi\left(\frac{\gamma}{c}\right), \end{array} \right.$$

¹³⁾ Dieser Ausdruck bleibt auch für $t \rightarrow 0$ endlich, da $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{c t}{e^{c t} - 1} = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t, \lambda) = T_2^\sigma(t) \cos \lambda - T_3^\sigma(t) \sin 2 \lambda, \\ \Delta \sigma_{v_0} = -T_1^r(t) \frac{g}{v_0} \cos \varepsilon_0 [T_1^{v_0}(t) + T_2^{v_0}(t) \sin \varepsilon_0] \Phi \left(\frac{\Delta v_0}{v_0} \right), \\ \Delta \sigma_\gamma = k_2 t^2 \cos \varepsilon_0 \Psi \left(\frac{\gamma}{c} \right). \end{array} \right.$$

Die einzelnen Funktionen T_i^r, A_j^r, \dots , die durch spezielle Funktionselemente zu realisieren sind, können nun auf Grund von exakten Flugbahnberechnungen noch näher bestimmt und den konkreten Verhältnissen angepasst werden. Auf diese Weise wird eine Genauigkeit der Darstellung erzielt, die den Anforderungen der Praxis gerecht zu werden vermag.

Die vorliegende Arbeit stellt die Erweiterung einer Untersuchung dar, die seinerzeit für die Firma Contraves AG, Zürich, ausgeführt wurde. Es sei auch an dieser Stelle Herrn Dr. A. GERBER, Direktor der Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon, Bührle & Co., und der Contraves AG, Zürich, für sein Interesse an dieser Untersuchung bestens gedankt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. ATHEN, *Ballistik* (Leipzig 1941).
- [2] P. CURTI, *Aussere Ballistik* (Frauenfeld 1945).
- [3] W. PIKE und T. R. SILVERBERG, *Designing Mechanical Computers*, Machine Design 1952, 131–137, 159–163.
- [4] A. P. SPEISER, *Koordinatensysteme in Feuerleitgeräten*, Z. angew. Math. Phys. 7, 1–16 (1956).
- [5] A. P. SPEISER, *Rechengерäte mit linearen Potentiometern*, Z. angew. Math. Phys. 3, 449–460 (1952).
- [6] A. SVOBODA, *Computing Mechanisms and Linkages* (New York 1948).

Summary

It is shown how the trajectories of antiaircraft shells and their perturbations can be approximated with sufficient accuracy in terms containing functions of only one single variable. In directors, these functions can be realized by suitable function producing calculation elements.

(Eingegangen: 26. November 1957.)

Möglichkeiten und Grenzen des Infrarotsehens

Von TONI SCHNEIDER und PETER SCHRANZ, Zürich ¹⁾

1. Einleitung

Bildwandlergeräte vollziehen die Transformation von einem Gegenstand in ein Bild mit anderem Spektrum und anderer Intensität durch einen Umwandlungs- sowie Verstärkungsvorgang in einer unmerklichen Zeitspanne. (Unter Gegenstand und Bild wird dabei eine ebene Konfiguration von Strahlungsdichten verstanden.)

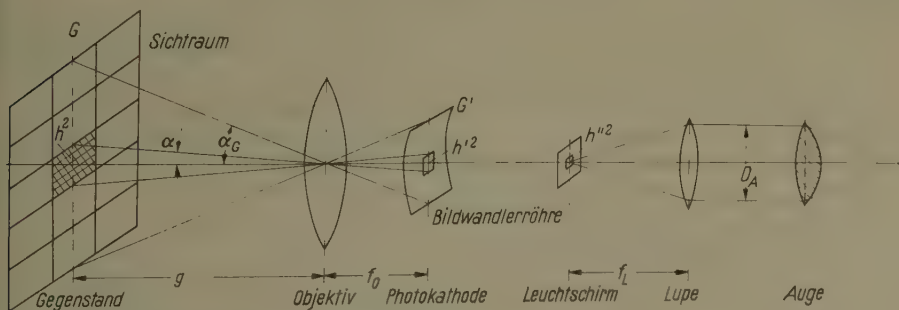
Die Bedeutung solcher Geräte liegt in folgendem:

- a) Man kann Bildwandlerphotokathoden herstellen, die auch auf unsichtbare Bereiche des Spektrums ansprechen;
- b) man kann schwache «Gegenstände» auf ein Helligkeitsniveau heben, das den von der Leuchtdichte abhängigen Sehfunktionen besser angepasst ist.

Ausgehend von den Strahlungsgesetzen bei optischer Abbildung, dem Umwandlungs- und Verstärkungsvorgang in der Bildwandlerröhre sowie den Strahlungsdichteschwankungen, behandelt dieser Bericht Grenzen und Möglichkeiten des Infrarotsehens unter der Voraussetzung einer bestimmten Sehanordnung.

2. Begriffe und schematische Anordnung

Aus der Fülle der Möglichkeiten wird den folgenden Betrachtungen eine Gerätevariante zugrunde gelegt, deren schematische Anordnung aus der Figur hervorgeht.



¹⁾ Physikalisches Laboratorium der Albiswerk Zürich AG.

- G Gesichtsfeld des Infrarotsichtgerätes (gesamte auf die wirksame Photokathode abbildbare Fläche);
 G' gesamte wirksame Fläche der Photokathode;
 h^2 Quadrätchen im Gesichtsfeld;
 h'^2 optisches Kathodenbild von h^2 ;
 h''^2 Leuchtschirmbild von h'^2 ;
 S Strahlungsdichte von h^2 [W/cm^2];
 E' Bestrahlungsstärke des optischen Bildes h'^2 [W/cm^2];
 S'' Strahlungsdichte des Leuchtschirmbildes h''^2 [W/cm^2];
 D_0 Eintrittspupille des Objektivs [cm];
 f_0 Objektivbrennweite [cm];
 τ_0 Transmission des Objektivs [%];
 $1/K_T$ effektive Öffnung des Objektivs; $1/K_T = \sqrt{\tau_0} D_0/f_0$;
 g Abstand Gegenstand-Objektiv;
 m_R Abbildungsmaßstab der Röhre;
 D_K wirksamer Kathodendurchmesser [cm];
 U_K Unschärfe des Gerätes, bezogen auf die Kathode [cm];
 $k(\lambda)$ relative spektrale Empfindlichkeit der Photokathode [%];
 $l(\lambda)$ relatives spektrales Emissionsvermögen des Leuchtschirms [%];
 $v(\lambda)$ relative, spektrale Hellempfindlichkeit des Auges [%];
 e_K integrale Kathodenempfindlichkeit [A/W];
 a_S Schirmausbeute [%];
 p Konstante; hängt von der Schirmstruktur ab;
 ΔU $\Delta U = U - U_0$;
 U Beschleunigungsspannung [V];
 U_0 «dead voltage» [V];
 D_A Eintrittspupille des Auges [cm]; Funktion der Schirmleuchtdichte [1^2];
 f_L Lupenbrennweite [cm];
 τ_L Transmission der Lupe [%];
 Γ_L Lupenvergrößerung

$$\Gamma_L = \frac{25}{f_L} ; \quad (2.1)$$

- Γ Gesamtvergrößerung des Gerätes

$$\Gamma = \frac{f_0}{f_L} m_R ; \quad (2.2)$$

- α Winkel, unter dem h^2 erscheint,

$$(\alpha) = [\text{min}] ; \quad (2.3)$$

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 259.

α_G Gesichtsfeldwinkel des Gerätes

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_G}{2} f_0 = \frac{D_K}{2}; \quad (2.4)$$

$\alpha^2 \Gamma^2$ aus geometrisch-optischen Beziehungen folgt:

$$h^2 m_0^2 m_R^2 \frac{1}{f_L^2} \approx \frac{h^2}{g^2} \Gamma^2 = \Gamma^2 \alpha^2 \left(\frac{2\pi}{360 \cdot 60} \right)^2. \quad (2.5)$$

3. «Sehvorgang»

Bekanntlich besteht bei optischer Abbildung zwischen der Strahlungsdichte des «Gegenstandes» und der Bestrahlungsstärke des «Bildes» die Beziehung

$$E = \frac{\pi S}{4 K_T^2}, \quad (3.1)$$

wenn nur der Abbildungsmaßstab $m \ll 1$ ist. Die Bestrahlungsstärke auf der Photokathode, hervorgerufen von einem «Gegenstand», beträgt demnach

$$E' = \frac{\pi S}{4 K_T^2}; \quad (3.2)$$

unter S wird dabei der von der Photokathode verwertbare Anteil verstanden, das heisst

$$S = \int S(\lambda) K(\lambda) d\lambda. \quad (3.3)$$

$S(\lambda)$ spektrale Emission des Gegenstandes $[W/cm^3]$.

Die Strahlungsdichte des Leuchtschirmes, hervorgerufen durch E' , ist:

$$\pi S'' = E' m_R^{-2} \eta = E' m_R^{-2} e_K \Delta U^P a_s. \quad (3.4)$$

η Umwandlungsfaktor $[W/W]$.

Offensichtlich beträgt die Strahlungsdichteverstärkung der mit einem Objektiv bewaffneten Bildwandlerröhre

$$\frac{S''}{S} = \frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} = \frac{e_K \Delta U^P a_s}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2}. \quad (3.5)$$

Im menschlichen Auge gelangt von der Strahlungsdichte S'' des Leuchtschirmes nur der Bruchteil

$$B = \beta S'' [\text{sb}] \quad (3.6)$$

zur Verwertung, wobei

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\int l(\lambda) d\lambda}{\int l(\lambda) V(\lambda) d\lambda} \cdot \frac{1}{M}. \quad (3.7)$$

M Mechanisches Lichtäquivalent $[lm/W]$.

Auf Grund der Dualnatur des Lichtes kann die Abstrahlung eines Leuchtschirmflächenelementes als Photonenemission aufgefasst werden. Die ausgesandten Photonen sind über die Zeit in solcher Weise verteilt, dass ihre durchschnittliche Zahl pro Flächen- und Zeiteinheit in einem gegebenen Raumwinkel proportional der Leuchtdichte ist:

$$N = \kappa B h''^2. \quad (3.8)$$

N Anzahl Photonen pro Sekunde; κ in den Halbraum ausgesandte Photonen-zahl pro Lumen.

Von diesen N in den Halbraum emittierten Photonen kann das mit einer Lupe bewaffnete Auge nur den Bruchteil

$$N' = N \tau_L \frac{D_A^2}{4 f_L^2} \quad (3.9)$$

auffangen.

Das fragliche Leuchtschirmelement (h''^2) zu sehen, besteht in der Fähigkeit des Auges, aus der Menge und Verteilung der auf die Netzhaut auftreffenden Photonen Informationen zu schöpfen.

Sei h''^2 ein h''^2 benachbartes Leuchtschirmelement, hervorgerufen durch zwei benachbarte Flächenelemente in der Gegenstandsebene, dann beträgt die ihnen zugeordnete Photonenemission

$$N'_0 t = \kappa B_0 h''^2 t \quad \text{bzw.} \quad N' t = \kappa B h''^2 t. \quad (3.10)$$

Da sich das Auftreffen der Photonen aus zufälligen Ereignissen zusammensetzt, ist dem Mittelwert der während einer gewissen Zeit die Netzhaut treffenden Photonen eine Schwankung überlagert, deren quadratischer Mittelwert proportional zur Quadratwurzel der auftreffenden Photonen ist. Wenn nun die Differenz der von der Netzhaut verwertbaren Photonen nicht grösser ist als die Schwankung um N , so ist es prinzipiell unmöglich, die fraglichen Flächenelemente (h''^2 , h''^2) als getrennt zu empfinden; eine Trennempfindung ist dann gewährleistet, wenn

$$N' \Theta t - N'_0 \Theta t \geq K \sqrt{N' \Theta t} \quad (3.11)$$

ist, wobei

Θ Quantenausbeute des Auges; Funktion der Schirmleuchtdichte [2].

- t Speicherzeit; sie ist die Zeit, in der die Photonen in einen Helligkeitseindruck umgesetzt werden. Die Trägheit von Bildwandlergeräten ist aber im allgemeinen nicht durch das Auge, sondern den Leuchtschirm gegeben; das heisst, t muss als Speicherzeit des Leuchtschirmes interpretiert werden.
- K gibt an, wievielmals sich die absorbierte Quantendifferenz aus dem statistischen Rauschen herausheben muss, damit eine Trennempfindung der beiden Quadrätchen zustande kommt. Analog oben (siehe unter Speicherzeit) muss das für die ganze Sehvorrichtung spezifische K gesetzt werden.

In der Beziehung (3.11) wurde die Untergrundaufhellung des Schirmes noch nicht berücksichtigt; sie kommt im wesentlichen durch Superposition folgender Effekte zustande:

- a) Durch Streustrahlung aus dem Sichttraume;
- b) durch Reflexion in den optischen Teilen;
- c) durch thermische Elektronenemission der Photokathode sowie der mit einem Alkalimetallfilm belegten Oberflächen des Röhreninnern;
- d) durch Strahlung, die infolge der Transparenz der Photokathode ins Röhreninnere gelangt, dort reflektiert wird und an der Kathode Elektronen ablöst.

Offenbar setzt sich die Untergrundaufhellung aus je einem durch das Sichtgerät sowie den Sichtraum verursachten Anteil zusammen.

$$B_V + B_G = \beta \left(\frac{\eta}{4 m_R^2 K_T^2} \cdot S_v + S_G \right). \quad (3.12)$$

S_v Strahlungsdichte der Streustrahlung aus dem Sichtraum; S_G geräteseitig bedingte Aufhellung.

Somit ergänzt sich (3.11) zu

$$N' \Theta t - N'_0 \Theta t \geq K \sqrt{N' \Theta t + N'_v \Theta t + N'_G \Theta t}. \quad (3.13)$$

Dadurch, dass jeder Photonendifferenz eine Leuchtdichtedifferenz und damit ein Kontrast entspricht, kann (3.13) in eine Grenzbeziehung umgeformt werden, die besagt, dass bei gegebenen Gerätedaten zu jeder Strahlungsdichte des Gegenstandes eine Wertegruppe von Schwellenkontrast, Unschärfe und Speicherzeit gehört, die nicht unterschritten werden kann.

$$\left(\frac{\Theta t N' - \Theta t N'_0}{\Theta t N'} \right)^2 = C^2 \geq K^2 \frac{N' + N'_v + N'_G}{(N' \Theta t)^2}. \quad (3.14)$$

Mit

$$N' + N'_v + N'_G = \frac{\kappa \beta}{16} \left(\frac{2 \pi}{360 \cdot 60} \right)^2 \tau_L D_A^2 \frac{\eta}{m_R^2 K_T^2} \Gamma^2 \alpha^2 \left(S + S_v + S_G 4 \frac{m_R^2 K_T^2}{\eta} \right)$$

und

$$N' = \frac{\kappa \beta}{16} \left(\frac{2 \pi}{360 \cdot 60} \right)^2 \tau_L D_A^2 \frac{\eta}{m_R^2 K_T^2} \Gamma^2 \alpha^2 S$$

aus (2.2), (2.3), (2.5), (3.4), (3.9), (3.12) kann (3.14) auch in der Form

$$C^2 S \frac{\tau_L}{4 K_T^2} \cdot \frac{\eta}{m_R^2} \left(\frac{1}{S_v + S_G \cdot 4 \frac{m_R^2 K_T^2}{\eta}} \right) \Gamma^2 \alpha^2 t \left. \vphantom{\frac{\tau_L}{4 K_T^2}} \right\} \quad (3.15)$$

$$\geq K^2 \frac{4}{\kappa} \left(\frac{360 \cdot 60}{2 \pi} \right)^2 \frac{1}{D_A^2 \Theta}$$

oder

$$I' = \frac{1}{C^2 \alpha^2} \leq \left(\frac{2 \pi}{360 \cdot 60} \right)^2 \kappa \frac{\tau_L \Gamma^2}{4 K_T^2} \cdot \frac{D_A^2 \Theta}{4} \times \frac{\eta t \beta}{m_R^2 K^2} \left(\frac{1}{S_v + S_G \cdot 4 \frac{m_R^2 K_T^2}{\eta}} \right) \left. \vphantom{\frac{\tau_L \Gamma^2}{4 K_T^2}} \right\} \quad (3.16)$$

geschrieben werden. I' , ein Mass für die Grösse (α) und den Schwellenkontrast (C) eines noch erkennbaren Details, ist als Detailinformationsgüte zu interpretieren.

Bildwandlergeräte haben aber im allgemeinen nicht ein einzelnes, sondern möglichst viele im Gesichtsfeld (H) befindliche Einzelheiten (h^2) zu vermitteln. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes nimmt (3.15) mit

$$\alpha^2 = \left(\frac{360 \cdot 60}{2 \pi} \right)^2 \frac{h^2}{G} \cdot \frac{G'}{f_0^2} = \left(\frac{360 \cdot 60}{2 \pi} \right)^2 \frac{h^2}{G} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_G}{2} \right)^2$$

folgende Form an:

$$I = \frac{G}{C^2 h^2} \leq \kappa \frac{\tau_L \Gamma^2}{4 K_T^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_G}{2} \right)^2 \frac{D_A^2 \Theta}{4} \times \frac{\eta t \beta}{m_R^2 K^2} \left(\frac{1}{S_v + S_G \cdot 4 \frac{m_R^2 K_T^2}{\eta}} \right) S \left. \vphantom{\frac{\tau_L \Gamma^2}{4 K_T^2}} \right\} \quad (3.17)$$

I , ein Mass dafür, wieviele mit einem Schwellenkontrast (C) belegte Einzelheiten (h^2) aus dem Gesichtsfeld (G) erkennbar sind, ist als Gesichtsfeldinformationsgüte aufzufassen.

Bei der Verwendung von Infrarotsichtgeräten im Anstrahlverfahren wird die Strahlungsdichte, unter der ein Gegenstand erscheint, durch einen Infrarotscheinwerfer hervorgerufen. Unter Vernachlässigung der atmosphärischen Verluste ist die Strahlungsdichte eines Gegenstandes gegeben durch

$$S = \frac{D^2 \varrho}{4 R^2} S_{ST} \quad (3.18)$$

R Abstand Scheinwerfer–Gegenstand; D Durchmesser der scheinbaren Strahlungsquelle (zum Beispiel Reflektordurchmesser); ϱ Reflexionsvermögen des Gegenstandes (Lambert-Strahler); S_{ST} Strahlungsdichte der Strahlungsquelle

$$S_{ST} = \int S_{ST}(\lambda) f(\lambda) d\lambda; \quad (3.19)$$

$S_{ST}(\lambda)$ spektrales Emissionsvermögen der Strahlungsquelle; $f(\lambda)$ spektrale Durchlässigkeit des Infrarotfilters.

Unter der Voraussetzung ausreichender Strahlungsdichte der Scheinwerferquelle existiert bei variablem R und konstantem ϱ ein Sichtraumgebiet, dessen Schirmbildleuchtdichte die Untergrundaufhellung zu vernachlässigen gestattet; mit (3.16) bzw. (3.17) gilt demnach:

$$B = \beta \frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} S \gg \beta \left(S_v \frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} + S_G \right). \quad (3.20)$$

Aus dem Umstand, dass die Quantenausbeute der Netzhaut allein auf Kosten der Sehschärfe zunimmt und das Produkt ΘB im Leuchtdichtebereich $10^{-3} [\text{asb}] \leq B \leq 10^6 [\text{asb}]$ konstant ist, geht an B mit (3.20) zudem die Forderung:

$$B \geq 10^{-3} [\text{asb}]. \quad (3.21)$$

In diesem Sichtraumbereich fällt die statistische Schwankung gegenüber der Photonenzahl ausser Betracht. Bei Vernachlässigung der Variation des Augenpupillendurchmessers mit der Leuchtdichte bestimmt sich die Informationsgüte allein aus optischen Gerätedaten:

$$\alpha^2 C^2 I^2 = \text{const}, \quad (3.22)$$

$$I' = \frac{1}{C^2 \alpha^2} = I^2 \cdot \text{const}, \quad (3.23)$$

$$I = \frac{G}{C^2 h^2} = I^2 \left(\text{tg} \frac{\alpha_G}{2} \right)^2 \cdot \text{const}. \quad (3.24)$$

Im folgenden Sichtraumgebiet

$$\beta \frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} S \geq \beta \left(S_v \frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} + S_G \right) \quad (3.25)$$

erfahren die Informationsgüten infolge der mit wachsendem R abnehmenden SchirMLEuchtdichte und der damit vermehrt ins Gewicht fallenden Untergrundaufhellung Einbussen, zu deren Veranschaulichung der folgende Reichweitebegriff dienen möge.

Verstehen wir unter R diejenige Gegenstandsweite, in der eine zu definierende Einzelheit ($C^2 \alpha^2$) noch gerade erkennbar ist, so kann sie mit (3.15), (3.18) und unter Vernachlässigung der atmosphärischen Verluste durch folgende Beziehung festgelegt werden:

$$R = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{e S_{ST}}{\left(\frac{360 \cdot 60}{2 \pi}\right)^2 \frac{1}{C^2 \alpha^2} \cdot \frac{4 K_T^2}{I^2} \cdot \frac{4}{D_A^2 \Theta} \cdot \frac{m_R^2 K^2}{\eta t \beta} \left(1 + \frac{S_v + S_G \cdot 4 \frac{m_R^2}{\eta} K_T^2}{S}\right)}}. \quad (3.26)$$

4. Grenzen und Möglichkeiten

Ausreichende Strahlerleistung, Reduktion der Untergrundaufhellung sowie geeignete Dimensionierung der im technologischen Spielraum wählbaren Gerätedaten sind Möglichkeiten dafür, die in der Statistik des «Sehvorgangs» begründete Begrenzung der Erkennbarkeit auf eine fundamentale Schwelle zu senken. Sowohl der Strahlungsdichte der Scheinwerferquelle als auch dem Durchmesser der scheinbaren Strahlungsquelle sind aus technologischen oder dem übergeordneten Gründen Grenzen gesetzt. Den andern Möglichkeiten kommt daher grosse Bedeutung zu.

4.1 Untergrundaufhellung

Die im wesentlichen durch Streustrahlung aus dem Sichtraum sowie durch thermische Elektronenemission der Photokathode verursachte Untergrundaufhellung kann durch geeignete Aufstellung von Sichtgerät und Scheinwerfer (Parallaxe) bzw. durch Kühlung der Kathode weitgehend unterbunden werden.

Auf diese Weise gelingt es insbesondere, den thermischen Anteil auf eine Schwelle zu senken, wo von dieser Seite keine Begrenzung mehr vorliegt. Die dazu notwendige Kathodentemperatur hängt unter anderem von der Grenzwellenlänge, der Schirmausbeute und der Beschleunigungsspannung ab. Bei Vernachlässigung der Streustrahlung aus dem Sichtraum bestimmt sich der durch Beseitigung der thermischen Aufhellung erzielbare Reichweitengewinn mit (3.26) zu:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} S + S_G}{\frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} S}}. \quad (4.1)$$

R_1 Reichweite des Geräts mit gekühlter Kathode; R_2 Reichweite des Geräts mit ungekühlter Kathode.

4.2. Dimensionierung der frei wählbaren Gerätedaten

Aus (3.20), (3.21) und den sich anschliessenden Folgerungen erwächst nebst der Reduktion der Untergrundaufhellung die Forderung nach Strahlungsdichteverstärkung; gemäss (3.5) liegt sie dann vor, wenn

$$\frac{S''}{\bar{S}} = \frac{e_K \Delta U^P a_s}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} > 1. \quad (4.21)$$

Dadurch, dass der Kathodenempfindlichkeit (e_K), der Schirmausbeute (a_s) und der Beschleunigungsspannung (ΔU) obere Grenzen gesetzt sind, kann die Verstärkung allein mit grosser effektiver Öffnung des Objektivs ($1/K_T$) und kleinem Abbildungsmaßstab (m_R) der Bildwandlerröhre erzielt werden. Da kleine Abbildungsmaßstäbe eine grosse Elektronendichte und damit eine hohe thermische Untergrundaufhellung bedingen, sind auch diesem Datum, wenigstens bei ungekühlter Kathode, Grenzen gesetzt (3.20).

Im Gegensatz zu den Tagesfernrohren ist es bei Infrarotsichtgeräten nicht möglich, den zu beobachtenden Gegenstand mit unbewaffnetem Auge aufzusuchen und ihn nach vollzogener Fixierung mit dem Sichtgerät näher zu betrachten. Um dennoch eine Orientierung zu ermöglichen, geht es mit (3.17) darum, aus einem möglichst grossen Gesichtsfeld (G) eine Höchstzahl von Detailinformationen zu erhalten. Die dadurch erwachsenden Forderungen nach grossem Gesichtsfeldwinkel, grosser Gesamtvergrösserung, grosser effektiver Öffnung des Objektivs und hoher Strahlungsdichteverstärkung lassen sich gemäss

$$\Gamma \operatorname{tg} \frac{\alpha_G}{2} = \frac{D_K}{2} \cdot \frac{1}{U_K} \cdot \frac{U_A}{25} \quad (4.22)$$

(U_A Unschärfe des Auges in deutlicher Sehweite) allein durch hohe Bildwandlerauflösung ($1/U_K$), grosse wirksame Photokathodenfläche und eine im Rahmen (4.21) zulässige Objektivbrennweite realisieren. Da die Fehler der Elektronenoptik Durchmesser und Kathodenkrümmung weitgehend bestimmen und die Auflösung in der Körnigkeit des Leuchtschirms eine weitere Beschränkung erfährt, sind auch diesen Daten Grenzen gesetzt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. GLOCKER, *Röntgen- und Radiumphysik für Mediziner* (Stuttgart 1949).
- [2] A. ROSE, *Television Pickup Tubes and the Problem of Vision*, *Advanc. Electron.* 1 (1948).
- [3] A. ROSE, *The Sensitivity Performance of the Human Eye on an Absolute Scale*, *J. opt. Soc. Amer.* 38, Nr. 2 (1948).
- [4] G. L. KRIEGER, G. A. MORTON und I. E. RUEDY, *The Brightness Intensifier*, *R.C.A. Rev.* 9 (1948).

- [5] E. FENNER und O. SCHOTT, *Möglichkeiten und Grenzen der Bildverstärkung*, Z. angew. Phys. 6, H. 2 (1954).
 [6] F. ECKART, *Elektronenoptische Bildwandler und Röntgenbildverstärker* (Leipzig 1956).

Résumé

Le présent article a pour objet la détermination des limites et des possibilités de l'observation infra-rouge au moyen d'un dispositif optique déterminé. On décrit des possibilités susceptibles de réduire au maximum la limitation de l'information basée sur la statistique du phénomène visuel.

(Eingegangen: 13. Dezember 1957.)

On Prager's Hardening Rule

By RICH. THORPE SHIELD, Providence, R. I., USA¹⁾, and HANS ZIEGLER, Zürich²⁾

1. Introduction

In order to describe the behaviour of a rigid-work-hardening material, one needs

- (a) an initial yield condition, specifying the states of stress for which plastic flow first sets in;
- (b) a flow rule, connecting the plastic strain increment with the stress and the stress increment;
- (c) a hardening rule, specifying the modification of the yield condition in the course of plastic flow.

It is customary to represent the yield condition as a surface in stress space, convex [1]³⁾ and initially containing the origin. The current yield conditions for a metal are those of v. MISES [2] and of TRESCA [3]. The flow rule generally accepted is also due to v. MISES [4]. It is justified to a certain extent by physical reasons [5, 1], and it states that the strain increment vector lies in the exterior normal of the yield surface at the stress point. As to the hardening rule, there are various versions in use. The rule of isotropic work-hardening [6, 7] assumes that the yield surface expands during plastic flow, retaining its shape and situation with respect to the origin. Another rule, developed by PRAGER [8], assumes that the yield surface is rigid but undergoes a translation in the direction of the strain increment. This rule accounts for the Bauschinger effect

¹⁾ Brown University, Division of Applied Mathematics.

²⁾ ETH; 1956/57 Brown University, Providence, R. I., USA, Division of Applied Mathematics. The results presented in this paper were obtained in the course of research conducted under Contract Nonr 562(10) sponsored by the Office of Naval Research.

³⁾ Numbers in square brackets refer to References, page 275.

observed in the materials in question. The main advantage of the rule is that for piecewise linear yield conditions, such as that of TRESCA, the law exhibits a limited path independence of the final plastic strain with a resulting simplification in the mathematical analysis.

The following sections contain a discussion of PRAGER's hardening rule and its implications for special states of stress prevalent in practical applications.

Mention should be made of the work of HODGE (see [10], for example), which uses a strain-hardening rule which is a combination of the PRAGER rule and isotropic hardening.

2. Treatment in 9-Space

Let us consider an element of a rigid-work-hardening solid, referred to an orthogonal coordinate system x_i . The state of stress of this element can be represented by a stress point P in a 9-space σ_{ik} . In this space, the initial yield surface is represented by an equation

$$F(\sigma_{ik}) = k^2 = \text{const.} \quad (2.1)$$

In the following, for simplicity attention will be confined to initially isotropic materials for which the form of the function F is invariant with respect to a rotation of the stress state. An initially anisotropic material can be treated in an analogous manner.

The hardening rule suggested by PRAGER assumes that during plastic deformation the yield surface moves in translation. After a certain amount of plastic flow, it is given by

$$F(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}) = k^2, \quad (2.2)$$

where the tensor α_{ik} represents the total translation. Because α_{ik} is not necessarily the isotropic tensor δ_{ik} , where δ_{ik} is the Kronecker delta, *the material becomes anisotropic as a result of the hardening process*. Accordingly, direction is important and we shall fix the coordinate system x_i with respect to the element, small deformations being assumed.

Due to the flow rule of v. MISES, the plastic strain increment $d\varepsilon_{ik}$, considered as a vector in the space σ_{ik} , lies in the exterior normal of the surface (2.2) at P . Thus, it is represented by

$$d\varepsilon_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} d\lambda, \quad d\lambda > 0. \quad (2.3)$$

The definition of a Prager-hardening material is completed by assuming that the surface (2.2) moves in the direction of $d\varepsilon_{ik}$; more explicitly

$$d\alpha_{ik} = c d\varepsilon_{ik}, \quad (2.4)$$

where c is a constant characterizing the material. This work-hardening law is a generalization to complex states of stress of a linear work-hardening law in simple tension (Figure 1), which exhibits a Bauschinger effect. [The work-hardening modulus c_1 in simple tension (Figure 1) is related to the work-hardening modulus c by $c_1 = (3/2) c$.]

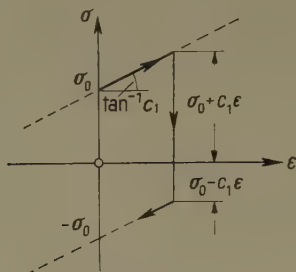


Figure 1

Response of the material considered in simple tension or compression.

The hardening rule described is physically acceptable because the components

$$\alpha_{ik} = c \varepsilon_{ik} \quad (2.5)$$

form a tensor of the second order, and the law is therefore independent of the particular coordinate system x_i chosen.

The scalar $d\lambda$ in (2.3) is determined by the condition that P remains on the yield surface in plastic flow. From this condition,

$$(d\sigma_{ik} - d\alpha_{ik}) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 0, \quad (2.6)$$

and from (2.4) and (2.3) follows at once

$$d\lambda = \frac{1}{c} \cdot \frac{(\partial F / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij}}{(\partial F / \partial \sigma_{kl}) (dF / \partial \sigma_{kl})}, \quad (2.7)$$

if the summation convention is adopted in 9-space.

In an initially isotropic solid the yield function takes the form

$$F(\sigma_{ik}) = G [I_1(\sigma_{ik}), I_2(\sigma_{ik}), I_3(\sigma_{ik})], \quad (2.8)$$

where

$$I_1 = \sigma_{ii}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji}, \quad I_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \quad (2.9)$$

are the invariants of the stress tensor. Moreover, if the initial yield is independent of the mean normal stress,

$$F(\sigma_{ik} + \beta \delta_{ik}) = F(\sigma_{ik}), \quad (2.10)$$

where β is an arbitrary scalar. When plastic flow has set in, the yield function becomes, on account of (2.2) and (2.8),

$$F(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}) = G [I_1(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}), I_2(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}), I_3(\sigma_{ik} - \alpha_{ik})]. \quad (2.11)$$

From (2.10) it follows that the values of (2.11) remain unchanged when σ_{ik} is replaced by $\sigma_{ik} + \beta \delta_{ik}$: PRAGER's hardening rule implies that *during the whole hardening process yield is independent of the mean normal stress*.

With (2.11), the flow rule (2.3) reads

$$d\epsilon_{ik} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ik}} d\lambda = \left(\frac{\partial G}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ik}} + \dots \right) d\lambda. \quad (2.12)$$

Since

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ik}} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{ik}} = \sigma_{ik} - \alpha_{ik}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ik}} = (\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma_{jk} - \alpha_{jk}), \quad (2.13)$$

we obtain from (2.12)

$$d\epsilon_{ik} = \left[\frac{\partial G}{\partial I_1} \delta_{ik} + \frac{\partial G}{\partial I_2} (\sigma_{ik} - \alpha_{ik}) + \frac{\partial G}{\partial I_3} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma_{jk} - \alpha_{jk}) \right] d\lambda. \quad (2.14)$$

Let us assume now that the physical coordinate axes originally coincide with the principal axes of stress. Then we have first

$$\sigma_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad \text{and} \quad \alpha_{ik} = 0. \quad (2.15)$$

From (2.14) follows

$$d\epsilon_{ik} = 0 \quad (i \neq k). \quad (2.16)$$

I.e., since the material is isotropic at the beginning, the strain increment tensor is coaxial with the stress tensor. By (2.4) and (2.16), also

$$d\alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k). \quad (2.17)$$

The last result remains valid if the second assumption (2.15) is replaced by the weaker assumption

$$\alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k). \quad (2.18)$$

It follows that, *if the principal axes of stress remain fixed in the element from the start, the strain increment tensor and thus the strain tensor remain coaxial with the stress tensor*.

If the principal axes of stress rotate, (2.16) holds only in a first step, provided the principal system of stress is used as the physical coordinate system. If (2.16) shall hold in a second step, the coordinate system must be rotated between the first step and the second one. This rotation, however, violates (2.18):

Due to the anisotropy caused by strain hardening, the strain increment tensor is in general not coaxial with the stress tensor.

Many problems of practical importance can be treated in a space of less than 9 dimensions. In certain cases, e.g., a 3-space defined by the principal stresses is useful. From our last result follows, however, that this 3-space is inadequate where the principal axes of stress are not fixed in the element. In addition, we shall see in the next sections that the reduction in dimensions is not without influence on the *form* of the hardening rule.

3. Treatment in 6-Space

On account of the symmetry of the stress and strain tensors, the problem may as well be treated in 6-space. It is convenient here and particularly for the subsequent specializations to denote the physical coordinates by x, y, z , the stresses by $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots$, and the strains by $\varepsilon_x, \dots, \varepsilon_{yz}, \dots$, where the dots indicate cyclic permutations.

In the new notations the yield condition (2.2) reads

$$F(\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots, \tau_{zy} - \alpha_{zy}, \dots) = k^2, \quad (3.1)$$

where $\tau_{yz}, \tau_{zy}, \dots$ have to be considered as independent variables. The flow rule (2.3) becomes

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} d\lambda, \dots, d\varepsilon_{yz} = \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} d\lambda, \dots, d\varepsilon_{zy} = \frac{\partial F}{\partial \tau_{zy}} d\lambda, \dots, \quad (3.2)$$

and the hardening rule (2.4) takes the form

$$d\alpha_x = c d\varepsilon_x, \dots, d\alpha_{yz} = c d\varepsilon_{yz}, \dots, d\alpha_{zy} = c d\varepsilon_{zy}, \dots \quad (3.3)$$

Treatment in 6-space, however, requires the elimination of the stress components τ_{zy}, \dots , of the strain components ε_{zy}, \dots , and of the displacements α_{zy}, \dots .

Because of the symmetry of the stress tensor

$$F(\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots, \tau_{zy}, \dots) = f(\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots). \quad (3.4)$$

Thus, the yield surface in 6-space is given by

$$f(\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots) = F[\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots, \tau_{zy} - \alpha_{zy}, \dots] = k^2. \quad (3.5)$$

From (3.2) and (3.5) we obtain

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\lambda, \dots, d\gamma_{yz} = 2 d\varepsilon_{yz} = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\lambda, \dots \quad (3.6)$$

This is the well-known result that *the flow rule of v. MISES remains valid in 6-space, if the state of strain is represented by the engineering components $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$* .

If PRAGER's hardening rule holds in 9-space, the yield surface (3.5) in 6-space also moves in a translation. On account of (3.3), this translation is given by

$$d\alpha_x = c d\epsilon_x, \dots, \quad d\alpha_{yz} = \frac{1}{2} c d\gamma_{yz}, \dots; \quad (3.7)$$

in general it is not in the direction of the exterior normal at the point P. (3.7) is the form that PRAGER's hardening rule takes in the new strain components in 6-space.

It might seem that, dropping the factors 1/2 in (3.7), one might postulate the validity of PRAGER's rule in its original form in 6-space, thereby renouncing its validity in this form in 9-space. Since both sides of (3.7) represent tensors, such a procedure would involve the sacrifice of the invariance of the rule with respect to rotations of the physical coordinate system. It is clear that this is unacceptable, and that we have to accept, conversely, the fact that the form of PRAGER's rule is apt to deteriorate in a subspace. The next sections will show different stages of this process.

4. Special Cases

In many practically important cases some of the stress components are absent. Starting once more in 9-space, we may denote the stress components present by σ'_{ik} , the zero ones by σ''_{ik} . The initial yield condition is then

$$F(\sigma'_{ik}, \sigma''_{ik} = 0) = H(\sigma'_{ik}) = k^2. \quad (4.1)$$

If we are not interested in the strains ϵ''_{ik} corresponding to the zero stresses σ''_{ik} , we may treat the problem in a subspace σ'_{ik} . Here, $H(\sigma'_{ik})$ defines a new yield surface.

After plastic flow has set in, the yield surface is given by

$$F(\sigma'_{ik} - \alpha'_{ik}, -\alpha''_{ik}) = k^2. \quad (4.2)$$

We will not be able, in general, to express (4.2) by means of the function H : *in general, hardening implies a deformation of the yield surface in a subspace.*

From (4.1) follows

$$d\epsilon'_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma'_{ik}} d\lambda \left(= \frac{\partial H}{\partial \sigma'_{ik}} d\lambda \right). \quad (4.3)$$

Thus, *the flow rule remains valid in any subspace.* However, it supplies only the strain components ϵ'_{ik} defined in this subspace although the ϵ''_{ik} , too, may be

different from zero. It is clear, therefore, that *even in cases where the yield surface undergoes a translation, it may move in a direction different from the outward normal at the stress point P.*

The cases where the new yield surface does not deform are those in which it is possible to convert the left hand side of (4.2) such that the terms $-\alpha''_{ik}$ vanish.

When the initial yield is independent of the mean normal stress, the initial yield function can be written

$$f(\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots) = g(J_2, J_3), \quad (4.4)$$

where

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{3} \sigma_x^2 + \dots - \frac{1}{3} \sigma_y \sigma_z - \dots + \tau_{yz}^2 + \dots, \\ J_3 &= \frac{2}{27} \sigma_x^3 + \dots - \frac{1}{9} \sigma_y \sigma_z (\sigma_y + \sigma_z) - \dots + \frac{4}{9} \sigma_x \sigma_y \sigma_z \\ &\quad - \frac{1}{3} (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \tau_{yz}^2 - \dots + 2 \tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

are the invariants of the stress deviator. When plastic flow has set in, $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots$ have to be replaced by $\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots$. It follows that *yield remains independent of the mean normal stress.*

By (3.6)

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x &= \left(\frac{\partial g}{\partial J_2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial g}{\partial J_3} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_x} \right) d\lambda, \dots, \\ d\gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial g}{\partial J_2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \tau_{yz}} + \frac{\partial g}{\partial J_3} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \tau_{yz}} \right) d\lambda, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

where, on account of (4.5) and under the assumption that plastic flow has taken place,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{3} [2 (\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y - \alpha_y) - (\sigma_z - \alpha_z)], \dots, \\ \frac{\partial J_2}{\partial \tau_{yz}} &= 2 (\tau_{yz} - \alpha_{yz}), \dots, \\ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{9} [2 (\sigma_x - \alpha_x)^2 - (\sigma_y - \alpha_y)^2 - (\sigma_z - \alpha_z)^2 + 4 (\sigma_y - \alpha_y) (\sigma_z - \alpha_z) \\ &\quad - 2 (\sigma_z - \alpha_z) (\sigma_x - \alpha_x) - 2 (\sigma_x - \alpha_x) (\sigma_y - \alpha_y)] \\ &\quad - \frac{1}{3} [2 (\tau_{yz} - \alpha_{yz})^2 - (\tau_{zx} - \alpha_{zx})^2 - (\tau_{xy} - \alpha_{xy})^2], \dots, \\ \frac{\partial J_3}{\partial \tau_{yz}} &= -\frac{2}{3} [2 (\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y - \alpha_y) - (\sigma_z - \alpha_z)] (\tau_{yz} - \alpha_{yz}) \\ &\quad + 2 (\tau_{zx} - \alpha_{zx}) (\tau_{xy} - \alpha_{xy}), \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

From (2.10) follows

$$f(\sigma_x - \alpha_x + \beta, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots) = f(\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots). \quad (4.8)$$

Hence, in cases where one of the normal stresses, e.g. σ_z , is absent, the term $-\alpha_z$ can be eliminated by addition of α_z to the normal stresses.

If $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, (4.6) and (4.7) yield, in connection with (3.7),

$$d\gamma_{yz} = d\gamma_{zx} = 0 \quad (\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0). \quad (4.9)$$

This is the proof, by complete induction, that

$$\alpha_{yz} = \frac{1}{2} c \gamma_{yz} = 0, \quad \alpha_{zx} = \frac{1}{2} c \gamma_{zx} = 0 \quad (\tau_{yz} \equiv \tau_{zx} \equiv 0), \quad (4.10)$$

i.e. that, in the absence of at least two shear stresses, the corresponding shear strains and thus the corresponding displacements of the yield surface, are absent. This result might have been inferred from the symmetry (Figure 2) of

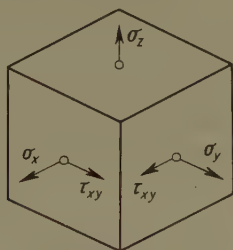


Figure 2

State of stress with $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

the state of stress with respect to the middle plane x, y of an element. It is clear that a similar result does not hold in general if only one shear stress is absent; on the other hand, (4.10) is the reason why PRAGER's hardening rule applies without change of form in the space of principal stresses.

While the foregoing results hold for any form of the yield function (4.4), we can obtain some more results by restricting ourselves to the more common types of g . In v. MISES' case, the function g reduces to J_2 , and the initial yield condition is

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_0^2, \quad (4.11)$$

where σ_0 is the initial yield limit in simple tension or compression. In TRESCA's case, g also depends on J_3 . Here, the yield condition is better discussed in terms of maximum shear stress.

In (4.10), it is essential that two shear stresses vanish: in cases where one shear stress only, i.e. τ_{xy} , is absent, it may be impossible to eliminate the corresponding displacement, α_{xy} , from the right hand side of (4.8), and this means that the yield surface deforms in the process of hardening. In TRESCA's case, this actually happens. However, if v. MISES' yield condition applies, it follows from (4.6), (4.7) and (3.7) that

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{2} c \gamma_{xy} = 0 \quad (\tau_{xy} \equiv 0). \quad (4.12)$$

If $\sigma_y = \sigma_z = 0$, we obtain from the same relations

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z, \quad \alpha_y = \alpha_z, \quad (\sigma_y \equiv \sigma_z \equiv 0), \quad (4.13)$$

provided the material obeys the yield condition of v. MISES. It is easy to see, however, that under TRESCA's yield condition (4.13) does not apply. In the last case it is not possible to eliminate both α_y and α_z from the right hand side of (4.8): the yield surface deforms in the course of hardening.

In the next sections we shall make use of the fact that the plastic volume change of the material is zero. That is,

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \quad (4.14)$$

a consequence of the flow rule and the independence of the yield function on the mean normal stress.

5. Plane Strain

Here, per definitionem,

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \varepsilon_z = 0. \quad (5.1)$$

From (4.10) we obtain

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \quad (5.2)$$

It follows from (3.7) that the yield function has the form

$$g\left(\sigma_x - c \varepsilon_x, \sigma_y - c \varepsilon_y, \sigma_z, \tau_{xy} - \frac{1}{2} c \gamma_{xy}\right). \quad (5.3)$$

On account of (3.6),

$$d\varepsilon_z = \frac{\partial g}{\partial \sigma_z} d\lambda = 0, \quad (5.4)$$

and by (4.14)

$$\varepsilon_y = -\varepsilon_x. \quad (5.5)$$

Thus, we finally get the yield condition

$$h\left(\sigma_x - c \varepsilon_x, \sigma_y + c \varepsilon_x, \tau_{xy} - \frac{1}{2} c \gamma_{xy}\right) = k^2. \quad (5.6)$$

It follows that the yield surface moves in a translation, but, on account of the factor $1/2$ in the last argument, not in the direction of the exterior normal.

In many cases where the original form of PRAGER's hardening rule does not hold in the subspace appropriate to the problem, this defect can be remedied by a transformation. Here, for instance, the new quantities

$$t_{xy} = \sqrt{2} \tau_{xy}, \quad g_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{xy} \quad (5.7)$$

can be introduced. The yield condition (5.6) becomes

$$p(\sigma_x - c \varepsilon_x, \sigma_y + c \varepsilon_x, t_{xy} - c g_{xy}) = k^2, \quad (5.8)$$

and the form of PRAGER's rule in 9-space is regained.

In order to specialize (5.8) for v. MISES' yield condition, we start from (4.5) and obtain first

$$f = J_2 = \frac{1}{3} (\sigma_x - c \varepsilon_x)^2 + \dots - \frac{1}{3} (\sigma_y - c \varepsilon_y) (\sigma_z - c \varepsilon_z) - \dots \left. \begin{array}{l} \\ + \left(\tau_{xy} - \frac{1}{2} c \gamma_{xy} \right)^2 + \dots \end{array} \right\} \quad (5.9)$$

Carrying out the steps (5.3) through (5.8) with (5.9), we get

$$p = [(\sigma_x - c \varepsilon_x) - (\sigma_y + c \varepsilon_x)]^2 + 2 (t_{xy} - c g_{xy})^2 = \frac{4}{3} \sigma_0^2. \quad (5.10)$$

Figure 3 shows the yield surface, a circular cylinder of radius $(2/3)^{1/2} \sigma_0$ the axis of which is parallel to the plane σ_x, σ_y and bisects the angle between the axes σ_x and σ_y .

In order to specialize (5.8) for TRESCA's case, we start from the principal stresses

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad (5.11)$$

where σ_3 lies between σ_1 and σ_2 . The material yields initially when the maximum shear stress reaches a critical value,

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{1}{4} \sigma_0^2. \quad (5.12)$$

After plastic flow has set in, (5.12) takes the form (5.10) with σ_0^2 replacing

$4 \sigma_0^2/3$ on the right hand side. The yield surface is a circular cylinder (Figure 3) of radius $\sigma_0/\sqrt{2}$, moving in the direction of the outward normal.

Subcase a: If $\tau_{xy} = 0$, (4.10) yields $\gamma_{xy} = 0$. The problem can be treated in a (σ_x, σ_y) -plane and is a degenerate case of principal stress space with the principal strain ε_z zero. The yield locus is the strip obtained by bisecting the cylinder of Figure 3 parallel to the plane σ_x, σ_y .

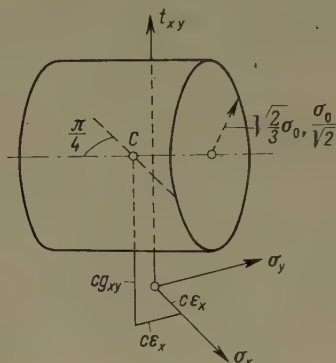


Figure 3

Yield surface in plane strain.

Subcase b: If $\sigma_y = 0$, the problem can be treated in a (σ_x, τ_{xy}) -plane. The yield locus, obtained by intersecting the cylinder of Figure 3 with a plane parallel to the plane σ_x, t_{xy} , does not move in the direction of the exterior normal. However, if besides (5.7) the transformation

$$s_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x, \quad e_x = \sqrt{2} \varepsilon_x \quad (5.13)$$

is used, the yield condition (5.10) with $\sigma_y = 0$ becomes

$$(s_x - c e_x)^2 + (t_{xy} - c g_{xy})^2 = \frac{2}{3} \sigma_0^2. \quad (5.14)$$

The yield locus is a circle of radius $(2/3)^{1/2} \sigma_0$ in v. MISES' case and $(1/2)^{1/2} \sigma_0$ in TRESCA's case, moving in the direction of the exterior normal.

6. Plane Stress

Here, per definitionem,

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (6.1)$$

On account of (4.10),

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \quad (6.2)$$

and from (4.14) follows

$$\varepsilon_x = -(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (6.3)$$

Hence, the yield function is

$$g\left[\sigma_x - c \varepsilon_x, \sigma_y - c \varepsilon_y, c(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \tau_{xy} - \frac{1}{2} c \gamma_{xy}\right]. \quad (6.4)$$

After subtraction of $c(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ from the normal stresses in accordance with (4.8) we obtain the yield condition

$$h\left[\sigma_x - c(2\varepsilon_x + \varepsilon_y), \sigma_y - c(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y), \tau_{xy} - \frac{1}{2} c \gamma_{xy}\right] = k^2. \quad (6.5)$$

Again, the yield surface moves in a translation, but not in the direction of the exterior normal.

If we make use of the transformations

$$\left. \begin{aligned} s_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), & s_\eta &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_y - \sigma_x), & t_{\xi\eta} &= \sqrt{3}\tau_{xy}, \\ e_\xi &= \varepsilon_x + \varepsilon_y, & e_\eta &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_y - \varepsilon_x), & g_{\xi\eta} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

the yield surface becomes

$$p\left(s_\xi - \frac{3}{2} c e_\xi, s_\eta - \frac{3}{2} c e_\eta, t_{\xi\eta} - \frac{3}{2} c g_{\xi\eta}\right) = k^2 \quad (6.7)$$

and moves in the direction of the outward normal.

In the case of v. MISES' yield condition, (6.7) takes the form

$$p = \left(s_\xi - \frac{3}{2} c e_\xi\right)^2 + \left(s_\eta - \frac{3}{2} c e_\eta\right)^2 + \left(t_{\xi\eta} - \frac{3}{2} c g_{\xi\eta}\right)^2 = \sigma_0^2. \quad (6.8)$$

The yield surface (an ellipsoid in the original stresses) is a sphere of radius σ_0 .

In TRESCA's case, we obtain three sheets

$$2\left(\frac{s_\eta^2 + t_{\xi\eta}^2}{3}\right)^{1/2} = \sigma_0, \quad \left|s_\xi \pm \left(\frac{s_\eta^2 + t_{\xi\eta}^2}{3}\right)^{1/2}\right| = \sigma_0. \quad (6.9)$$

Thus, the yield surface (Figure 4) is a circular cylinder, closed by two circular cones such that the intersections of the whole surface with the middle planes parallel to s_ξ , s_η and $s_\xi, t_{\xi\eta}$ are regular hexagons with sides σ_0 .

It often happens that the yield surface contains singularities. In 3-space such singularities are edges where two smooth surfaces intersect (in Figure 4 the circles of intersection between cylinder and cones) or corners where more than two smooth surfaces meet. An isolated singularity or vertex (in Figure 4) the vertex of either cone) may be considered as a limiting case of a corner.

If P is to remain in a corner or vertex, the yield surface must move with P ; hence, the displacement $d\vec{\alpha}$ coincides with the stress increment $d\vec{\sigma}$. The strain increment $d\vec{\varepsilon}$ follows from $d\vec{\alpha}$, since the components of $\vec{\alpha}$ are the factors of c in the general equation [here (6.5) or (6.7)] of the yield surface. If $d\vec{\alpha} = c d\vec{\varepsilon}$, then P remains in the corner or vertex as long as $d\vec{\sigma}$ lies in the pyramid or cone enclosed by the exterior normals of the yield surface in the vicinity of the singu-

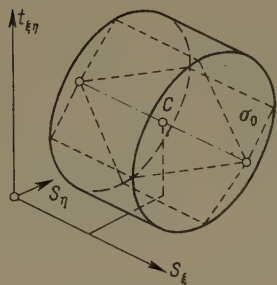


Figure 4

Tresca yield surface in plane stress.

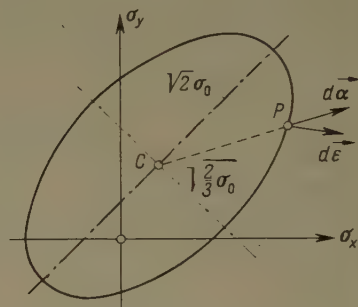


Figure 5

v. Mises yield locus in plane stress with $\tau_{xy} = 0$.

larity. If $d\vec{\alpha} \neq c d\vec{\varepsilon}$, the pyramid or cone is obtained from the vectors $d\vec{\alpha}$ instead of the normals.

If P is to remain in an edge, the components of $d\vec{\sigma}$ and $d\vec{\alpha}$ normal to the edge must coincide. Further, according to the flow rule, $d\vec{\varepsilon}$ has no component along the tangent of the edge. Thus, two components of $d\vec{\alpha}$ and the third one of $d\vec{\varepsilon}$ are known as soon as $d\vec{\sigma}$ is given. The remaining components follow again from the equation of the yield surface. If $d\vec{\alpha} = c d\vec{\varepsilon}$, P remains in the edge as long as $d\vec{\sigma}$ lies in the wedge enclosed by the normals of the yield surface in the vicinity of the edge. If $d\vec{\alpha} \neq c d\vec{\varepsilon}$, the vectors $d\vec{\alpha}$ take the function of the normals.

Subcase a: If $\tau_{xy} = 0$, (4.10) yields $\gamma_{xy} = 0$. The problem can be treated in a (σ_x, σ_y) -plane, the section of principal stress space by the plane $\sigma_z = 0$.

In v. MISES' case, the yield locus is the well-known ellipse illustrated in Figure 5 with the equation

$$\left. \begin{aligned} & [\sigma_x - c(2\varepsilon_x + \varepsilon_y)]^2 + [\sigma_y - c(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y)]^2 \\ & - [\sigma_x - c(2\varepsilon_x + \varepsilon_y)][\sigma_y - c(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y)] = \sigma_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Comparing the vectors $d\alpha_x$, $d\alpha_y$ and $d\varepsilon_x$, $d\varepsilon_y$ following from (6.10), we easily obtain

$$d\alpha_x = 3c(\sigma_x - \alpha_x)d\lambda, \quad d\alpha_y = 3c(\sigma_y - \alpha_y)d\lambda. \quad (6.11)$$

Hence, the ellipse moves in the direction of the radius CP .

Using the transformations (6.6), we obtain a representation in a plane s_ξ, s_η . Here, the yield locus is a circle of radius σ_0 , moving in the direction of the outward normal.

In TRESCA's case, the yield locus in the (σ_x, σ_y) -plane is the hexagon of Figure 6. The arrows indicate the vectors $d\vec{\alpha}$, of constant direction on each side, given by the line connecting the center of the side in question with the center

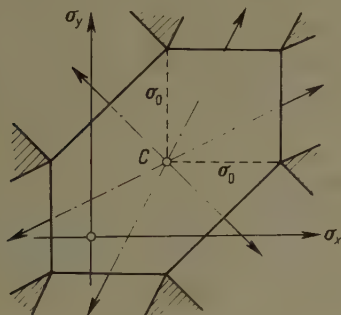


Figure 6

Tresca yield locus in plane stress with $\tau_{xy} = 0$.

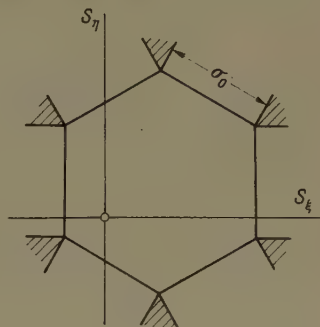


Figure 7

Yield locus of Figure 6 in s_ξ, s_η .

of the opposite side. If $d\vec{\sigma}$ lies in one of the shaded regions, the hexagon moves with P . Taking $d\alpha_x, d\alpha_y$ from (6.5), solving for $d\epsilon_x, d\epsilon_y$ and setting $d\vec{\alpha} = d\vec{\sigma}$, we obtain

$$d\epsilon_x = \frac{1}{3c} (2 d\sigma_x - d\sigma_y), \quad d\epsilon_y = \frac{1}{3c} (2 d\sigma_y - d\sigma_x) \quad (6.12)$$

for the strain increment in a corner of the hexagon.

In the (s_ξ, s_η) -plane the yield locus becomes a regular hexagon (Figure 7) with side σ_0 moving in the direction of the exterior normal. It is clear that this hexagon is the section of the yield surface of Figure 4 with the plane of symmetry parallel to s_ξ, s_η .

If P remains in a corner,

$$d\epsilon_\xi = \frac{2}{3c} ds_\xi, \quad d\epsilon_\eta = \frac{2}{3c} ds_\eta; \quad (6.13)$$

thus, $d\vec{\epsilon}$ has the same direction as $d\vec{s} = d\vec{\alpha}$.

Subcase a: If $\sigma_y = 0$, the problem can be treated in a (σ_x, τ_{xy}) -plane. However, since (4.13) only applies in v. MISES' case, the yield locus deforms in any other case in the process of hardening.

In TRESCA's case, for instance, the initial yield locus is the intersection of the yield surface of Figure 4 with one of the vertical planes passing through C and touching the two circular edges. The displacement of C , however, generally

does not lie in this plane, and it becomes clear, therefore, that the yield locus deforms.

In v. MISES' case, (4.13) applies. Hence, the yield locus does not deform. This follows also from the fact that the yield surface corresponding to Figure 4 is a sphere. The yield locus is the circle

$$\left(\sigma_x - \frac{3}{2} c \varepsilon_x\right)^2 + \left(t_{\xi\eta} - \frac{3}{2} c g_{\xi\eta}\right)^2 = \sigma_0^2 \quad (6.14)$$

in the plane $\sigma_x, t_{\xi\eta}$, where $t_{\xi\eta}$ and $g_{\xi\eta}$ follow from τ_{xy} and γ_{xy} by means of (6.6). The circle (6.14) is of radius σ_0 and has been discussed by PRAGER [9]. It moves in the direction of the outward normal.

7. Another Special Case

In certain cases, e.g., if a cylinder is subjected to torsion and simple tension, we have $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$. From (4.12) through (4.14) follows

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{1}{2} \varepsilon_z, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad (7.1)$$

provided the material obeys v. MISES' yield condition. For any other yield condition (4.12) and (4.13) do not generally hold; hence, the yield surface in 3-space deforms in the process of hardening.

Restricting ourselves to materials obeying v. MISES' condition, we start from (4.5), i.e., from the yield condition

$$\left. \begin{aligned} f = J_2 = \frac{1}{3} (\sigma_x - c \varepsilon_x)^2 + \dots - \frac{1}{3} (\sigma_y - c \varepsilon_y) (\sigma_z - c \varepsilon_z) - \dots \\ + \left(\tau_{yz} - \frac{1}{2} c \gamma_{yz} \right)^2 + \dots = \frac{1}{3} \sigma_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Inserting (7.1) and subtracting $c \varepsilon_z/2$ from the normal stresses, we obtain in this particular case

$$g = \left(\sigma_z - \frac{3}{2} c \varepsilon_z \right)^2 + 3 \left(\tau_{yz} - \frac{1}{2} c \gamma_{yz} \right)^2 + 3 \left(\tau_{zx} - \frac{1}{2} c \gamma_{zx} \right)^2 = \sigma_0^2. \quad (7.3)$$

This yield surface (an ellipsoid of rotation) moves in a translation, but not in the direction of the outward normal.

If we use the transformations

$$t_{yz} = \sqrt{3} \tau_{yz}, \quad t_{zx} = \sqrt{3} \tau_{zx}, \quad g_{yz} = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_{yz}, \quad g_{zx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_{zx}, \quad (7.4)$$

the yield surface becomes a sphere

$$p = \left(\sigma_z - \frac{3}{2} c \varepsilon_z \right)^2 + \left(t_{yz} - \frac{3}{2} c g_{yz} \right)^2 + \left(t_{zx} - \frac{3}{2} c g_{zx} \right)^2 = \sigma_0^2 \quad (7.5)$$

of radius σ_0 , moving in the direction of the exterior normal.

Subcase a: If $\sigma_z = 0$, (4.13) and (4.14) yield $\varepsilon_z = 0$. For v. MISES' yield condition, the problem can be treated in a (τ_{yz}, τ_{zx}) -plane. The yield locus is the circle

$$\left(\tau_{yz} - \frac{1}{2} c \gamma_{yz} \right)^2 + \left(\tau_{zx} - \frac{1}{2} c \gamma_{zx} \right)^2 = \frac{1}{3} \sigma_0^2 \quad (7.6)$$

of radius $3^{-1/2} \sigma_0$, moving in the direction of its outward normal.

It is interesting to note that under TRESCA's yield condition the yield surface deforms even in this comparatively simple case and that γ_{xy} does not remain zero.

Subcase b: If $\tau_{yz} = 0$, (4.10) yields $\gamma_{yz} = 0$. If v. MISES' yield condition holds, the problem can be treated in a (σ_z, t_{zx}) -plane. The yield locus is the circle

$$\left(\sigma_z - \frac{3}{2} c \varepsilon_z \right)^2 + \left(t_{zx} - \frac{3}{2} c g_{zx} \right)^2 = \sigma_0^2 \quad (7.7)$$

of radius σ_0 , moving in the direction of the exterior normal.

It is clear that the last result, apart from the difference in notation, is the one already obtained in the last subcase of section 6.

8. Conclusion

In sections 5 through 7 we have encountered the various possibilities discussed already in section 4. In most of the cases considered the yield surface moves in a translation, and a simple transformation at most suffices to make the original form of PRAGER's rule apply in the subspace appropriate to the problem. In certain cases, however, the yield surface deforms in the course of hardening. Incidentally, these exceptions occur, as far as our examples are concerned, in those cases where at the same time (a) more than one normal stress is different from zero and (b) the material obeys TRESCA's yield condition.

In section 1 the advantages of TRESCA's yield condition have been emphasized. The deformation of the yield surface which has been found in many cases represents a serious drawback in this respect.

REFERENCES

- [1] H. ZIEGLER, *An Attempt to Generalize Onsager's Principle, and Its Significance for Rheological Problems*, Z. angew. Math. Phys. 9b, 748 (1958).
- [2] R. v. MISES, *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*, Göttinger Nachrichten, Math. phys. Kl. 1913, 582 (1913).

- [3] H. TRESCA, *Mémoire sur l'écoulement des corps solides*, Mém. prés. Acad. Sci., Paris 78, 733 (1868).
- [4] R. v. MISES, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Z. angew. Math. Mech. 8, 161 (1928).
- [5] D. C. DRUCKER, *Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity*, Quart. appl. Math. 7, 411 (1950).
- [6] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity* (Oxford 1950).
- [7] P. G. HODGE, Jr., *The Theory of Piecewise Linear Isotropic Plasticity*, IUTAM Colloquium Madrid 1955, *Deformation and Flow of Solids* (Berlin 1956).
- [8] W. PRAGER, *The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements* (James Clayton Lecture), Proc. Inst. Mech. Eng. 169, 41 (1955).
- [9] W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie* (Basel 1955), p. 16.
- [10] P. G. HODGE, Jr., *Piecewise Linear Plasticity*, Proc. 9th Intern. Congr. Appl. Mech., Brussels, 1956.

Zusammenfassung

Um das Verhalten eines Metalls mit dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm der Figur 1 unter einem beliebigen räumlichen Spannungszustand zu beschreiben, wird neben der Annahme isotroper Verfestigung, welche aber den Bauschinger-Effekt nicht erklärt, die Pragersche Verfestigungsregel [8] verwendet. Es wird hier untersucht, welche Formen diese Regel in den wichtigsten Spannungsräumen von weniger als neun Dimensionen annimmt.

(Received: November 26, 1957.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

On the Free Convection from a Horizontal Plate

By KEITH STEWARTSON, Durham, England¹⁾

The free convection of heat from a heated vertical plate in a fluid has been extensively studied in recent years. A review of the work done has been given by SQUIRE [4]²⁾ and subsequently numerical solutions of the governing equations has been given by OSTRACH [2] for a wide range of values of the Prandtl number σ . The convection takes place in boundary layers originating at the lower edge of the plate. Fluid is drawn into them, is heated and gaining buoyancy moves upwards. On the other hand if the plate is cooled relative to the surrounding fluid the situation is reversed for the boundary layers originate at the top of the plate, and the fluid drawn into them is forced downwards. When the plate is inclined to the vertical there is no change in the flow pattern, since the vertical buoyancy force has a component along the plate which drives the fluid thus generating the boundary layer. However, if the plate is horizontal the buoyancy has no component along its length and the boundary layer, if it exists, must be of a different character.

¹⁾ Department of Mathematics, The University.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 281.

In this paper we shall examine the boundary layer on a horizontal plate showing that if the plate is heated and faces downwards or is cooled and faces upwards a solution can be found which is in moderately good agreement with experiment. On the other hand if the plate is heated and faces upwards or is cooled and faces downwards the boundary layer problem is not properly posed.

The appropriate equations for a heated plate inclined at an angle α to the horizontal are [4]

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \varrho g \sin \alpha + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \varrho g \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\mu}{\sigma} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (4)$$

in which x measures distance along the plate and upwards, y distance perpendicular to the plate and upwards, u, v are the components of velocity in these directions, p the pressure, ϱ the density, T the absolute temperature and μ the coefficient of viscosity. In deriving these equations it is assumed that both the viscosity and the difference between the ambient temperature T_0 and the plate temperature T_1 are sufficiently small. Let

$$p = p_0 - \varrho_0 g y \cos \alpha - \varrho_0 g x \sin \alpha + \varrho_0 P, \quad (5)$$

where ϱ_0 is the constant density of the fluid outside the boundary layer and p_0 is a constant. Since the boundary layer is thin, it follows from (2) that $\varrho_0 P$, which is the pressure increment inside it, is small. From the equation of state [4] we also have

$$\varrho - \varrho_0 = -\beta \varrho_0 (T - T_0), \quad (6)$$

where β is a constant. In particular for a gas $\beta T_0 = 1$. The first two equations of motion now reduce to

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \beta g \sin \alpha (T - T_0) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + \beta g \cos \alpha (T - T_0), \quad (8)$$

where ν is the kinematic viscosity.

The boundary conditions are that $u = v = 0$, $T = T_1$ at $y = 0$ and $u = 0$, $T = T_0$, $P = 0$ outside the boundary layer or, effectively, as $y \rightarrow \infty$. By themselves these are not sufficient to solve the problem completely since the equations are parabolic and initial profiles of T and u must be prescribed as well. If $\alpha \neq 0$ the difficulty may be overcome as follows. From (7) u must be positive if the plate is heated and therefore the boundary layer must originate at the lower edge of the plate where it must contain a zero mass of fluid. Similarly if the plate is cooled it must originate with zero mass at the upper edge of the plate.

If $\alpha = 0$ however it will appear below that the boundary layer does not always exist and even when it does it may originate at any value of x growing either in the direction of increasing x or in the direction of decreasing x . We shall assume the most obvious possibility, that the boundary layers originate at each of the two edges of the plate and grow towards the centre. SCHMIDT [3] has published a photograph of a heated horizontal plate in which the boundary layer is thicker at the centre than at the edges. It may be regarded as supporting but not conclusive evidence for the present assumption.

The solution of the governing equations for a horizontal plate may now be attempted. Take the origin of x to be one of the edges and write

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{|y|}{x} \left\{ \frac{|T_1 - T_0| \beta g \cos \alpha}{\nu^2} \right\}^{1/5}, & \psi &= \{x^3 \nu^3 \beta g \cos \alpha |T_1 - T_0|\}^{1/5} F(\eta), \\ T &= T_0 - |T_1 - T_0| \theta(\eta) \operatorname{sgn} y, & P &= -[\nu \beta^2 g^2 x \cos^2 \alpha (T_1 - T_0)^2]^{2/5} G(\eta) \operatorname{sgn} y, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

where ψ is the stream function defined by

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

so that

$$\left. \begin{aligned} u &= [x \nu \beta^2 g^2 \cos^2 \alpha (T_1 - T_0)^2]^{1/5} F'(\eta), \\ v &= -\frac{1}{5x} [x^3 \nu^3 \beta g \cos \alpha |T_1 - T_0|]^{1/5} (F - \eta F'). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

The factor $\cos \alpha$, equal to unity when the plate is horizontal, has been retained for convenience when inclined plates are discussed below. The equations for F , G , θ are, since $\alpha = 0$,

$$F''' + \frac{3}{5} F F'' - \frac{1}{5} F'^2 = \frac{2}{5} (G - \eta G'), \quad G' = \theta, \quad \theta'' + \frac{3}{5} \sigma F \theta' = 0 \quad (11)$$

with boundary conditions

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \pm \operatorname{sgn} y, & F &= F' = 0 \text{ at } \eta = 0, \\ \theta &\rightarrow 0, & P &\rightarrow 0, & F' &\rightarrow 0 \text{ as } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

The special form of these equations shows that there are only two distinct cases according as $\theta = +1$, or $\theta = -1$ at $\eta = 0$.

First suppose that $\theta = -1$ at $\eta = 0$, corresponding to a heated plate facing upwards or a cooled plate facing downwards. In this case (11) has no solution for on integrating the equation for F twice

$$F'(\eta) + \frac{3}{10} F^2(\eta) = -\frac{2}{5} \int_0^\eta d\eta \int_\eta^\infty (2F'^2 + G - \eta G') d\eta.$$

Hence

$$\frac{3}{10} F^2(\infty) = -\frac{2}{5} \int_0^\infty dy \int_\eta^\infty (2F'^2 + G - \eta G') d\eta = -\frac{2}{5} \int_0^\infty d\eta (2\eta F'^2 + \eta^2 \theta') d\eta, \quad (13)$$

which is a contradiction, since from the equation for θ , $\theta' \geq 0$. Thus the problem of a heated horizontal plate facing upwards has not been properly posed and most probably the plate does not have a boundary layer.

Second suppose that $\theta = +1$ at $\eta = 0$, corresponding to a heated plate facing downwards or a cooled plate facing upwards. Then (12) presents no difficulty and has been integrated numerically taking $\sigma = 0.72$, its value in air, it being found that

$$\theta'(0) = -0.358, \quad F''(0) = 0.971, \quad G(0) = -1.73, \quad F(\infty) = 2.30. \quad (14)$$

The form of the boundary layer is slightly different from that of a heated vertical plate because the buoyancy acts indirectly. It induces a *transverse* pressure gradient whose variation along the plate drives the fluid. When $\theta(0) = -1$ the pressure gradient along the plate which is induced is adverse thus explaining why no solution can be found. It is to be expected, and confirmed by (9), that since the buoyancy acts indirectly the boundary layer is weaker and thicker than it is on a vertical plate.

The flow pattern is similar to that arising from a finite circular cylinder rotating about its axis in a fluid which is rotating about the same axis but with a different angular velocity. Some problems of this kind have already been examined [5] and it may be shown that the basic equations are the same if $\sigma = 1$ and the two angular velocities are nearly equal. Indeed the present paper was stimulated by a discussion on rotating fluids with Professor SQUIRE. During it he showed me SCHMIDT's photograph of a heated horizontal plate pointing out that just as there is a fundamental difference between the flow inside and outside a rotating cylinder, so is there a difference between the flow above and below the plate.

The solution given by (9) and (14) refers to a boundary layer originating at one edge of the plate and there will also be another equal boundary layer originating at the other edge. The fluid in each of these layers is moving towards the centre where a collision between them must occur. Since the fluid in each layer has momentum, fluid must then be expelled moving away from the plate in a two-dimensional jet. The interaction between the boundary layers is similar to that in the theory of a rotating sphere already discussed [5]. Beyond a distance $O(\nu^{2/5})$ from the centre, the two boundary layers are independent. Within this distance each boundary layer divides into two layers, of which the outer layer is a jet, being controlled solely by the inertia terms and the inner of thickness $O(\nu^{3/5})$ is a conventional boundary layer with a mainstream and must separate. If, as is believed, the effect of the separation is small the inner layer may be neglected, when the initial profile of the jet is the same as the profiles of the two boundary layers just outside the interaction region when taken together.

The total heat transfer from unit length of a plate of breadth l is

$$H = 2 \int_0^{l/2} \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx.$$

Substituting from (9) and (14) we have

$$Nu = \frac{H \sigma}{(T_1 - T_0)} = 0.841 \left\{ \frac{\beta g^3 (T_1 - T_0) \sigma}{\nu^2} \right\}^{1/5} = 0.841 (Ra)^{1/5}, \quad (15)$$

where Nu , Ra are the Nusselt and Rayleigh numbers respectively.

FISHENDEN and SAUNDERS [1] have reported experiments on horizontal plates. These showed considerable qualitative differences according as the plates were heated or cooled, faced upwards or downwards, in agreement with the predictions of this paper. For heated plates facing downwards, when a quantitative comparison can be made with the results of this paper, they concluded that the flow is laminar throughout the range of their experiments and that

$$Nu = 0.25 (Ra)^{1/4}. \quad (16)$$

According to the graph of Nu against Ra which they display however the slope of the curve is almost exactly $1/5$ in $10^5 < Ra < 10^8$ thereafter increasing to $1/4$ as Ra increases to 10^{10} . It may be that at the upper end of the range of Ra the flow although not turbulent was slightly unstable. Another possible explanation of the increase in the index is that the temperature difference $T_1 - T_0$ was ultimately over 500°C when the effects of the variation of viscosity with temperature and of dissipation may be important. Assuming that $Nu \propto (Ra)^{1/5}$ throughout the closest fit with the curve is obtained when

$$Nu = 0.81 (Ra)^{1/5}. \quad (17)$$

The agreement is much better than when (16) is used. Although (15) and (17) agree quite well it must be remembered that the experiments were done with plates which were nearly square, while (15) is appropriate only to an infinitely long strip. The theoretical result for a square must have the same index as (15), from dimensional considerations, but since the square has four edges it would have a slightly higher coefficient.

Let us suppose now that the plate is inclined to vertical. The argument of this paper may still be used if

$$\frac{\partial P}{\partial x} \gg \beta g (T - T_0) \sin \alpha,$$

i. e.,

$$[\nu \beta^2 g^2 \cos^2 \alpha (T_1 - T_0)^2]^{2/5} x^{-3/5} G \gg \beta g |T_1 - T_0| \theta \sin \alpha. \quad (18)$$

Thus no matter how small α is then ultimately the component of the buoyancy along the plate must dominate the induced pressure gradient. To find when (18) holds let us assume that $G = O(\theta)$ and that \gg means more than 10 times as large. The condition is then that

$$\frac{x}{l} < \left\{ \frac{\cos^4 \alpha}{10^5 \sin^5 \alpha Ra} \right\}^{1/3}.$$

Thus the present theory is valid everywhere on the plate when $Ra = 10^5$ provided that the inclination of the plate to the horizontal is less than one degree.

On the other hand the condition that the component of buoyancy perpendicular to the plate be negligible can also be estimated. It is that

$$[\nu \beta^2 g^2 \cos^2 \alpha (T_1 - T_0)^2]^{2/5} x^{-2/5} G \ll \beta g |T_1 - T_0| \theta \sin \alpha. \quad (19)$$

It is clear from (19) that for any $\alpha < \pi/2$ the component of the buoyancy perpendicular to the plate must dominate the component parallel to the plate sufficiently near to the origin of the boundary layer. If we require (19) to hold over 90% of the plate then

$$10^8 \cos^4 \alpha < \sin^5 \alpha Ra,$$

whence if $Ra = 10^5$, $\alpha > 70^\circ$ approximately. Thus for plates inclined to the vertical the transverse pressure gradient induced by the buoyancy is important near the origin of the boundary layer over a large range of values of the Rayleigh number. Accordingly the boundary layers on either side of such a plate should be slightly different near their common origin.

The solution given here is valid if three assumptions are justified. First the boundary layers must be centred on the edges of the plate. Second the assumption implicit in (1)–(4), namely that $v \ll u$ must hold which means, from (10) and (15), that

$$\frac{v}{l} \left(\frac{x}{l} \right)^{1/5} (Ra)^{2/5} \gg \frac{v}{l} \left(\frac{x}{l} \right)^{-2/5} (Ra)^{1/5}, \quad \text{i. e. } \left(\frac{x}{l} \right) \gg (Ra)^{-1/3}. \quad (20)$$

Third the convection currents generated by other heated bodies in the neighbourhood must be negligible when compared with the velocities in the boundary layers. If the heated plate forms the ceiling of a closed room, of which the walls and floor are maintained at the same temperature, the only convection currents arise from the ceiling and do not modify the solution given here provided that (20) is satisfied. If however it is a face of a heated rectangular bar convection currents are set up from the vertical sides which are larger than the current set up from the horizontal face. There is a possibility therefore that in certain circumstances they may not be negligible in comparison with the velocities in the boundary layer. It is known [4] that the convection currents induced by a heated vertical plate are of order $v l^{-1} (Ra)^{1/4}$ assuming that a typical length in the vertical direction is also l . Further at a lower corner of the bar the convection currents outside the boundary layer may be singular the velocities being at worst of order $v^{-1/3}$, where v is the distance from the corner. Hence the velocity of the convection currents just outside the boundary layer are

$$O \left[\frac{v}{l} \left(\frac{l}{x} \right)^{1/3} (Ra)^{1/4} \right]$$

and are small compared with u if

$$\frac{v}{l} \left(\frac{x}{l} \right)^{1/5} (Ra)^{2/5} \gg \frac{v}{l} \left(\frac{l}{x} \right)^{1/3} (Ra)^{1/4}, \quad \text{i. e. } \frac{x}{l} \gg (Ra)^{-9/32}, \quad (21)$$

The difference between the indices in (20) and (21) is sufficiently small that the effect of these external convection currents may be neglected as soon as the boundary layer approximation is valid.

REFERENCES

- [1] FISHENDEN, M., and SAUNDERS, O. A., *An Introduction to Heat Transfer* (Oxford 1950), p. 95.
- [2] OSTRACH, S., N.A.C.A. Rep. No. 1111 (1953).
- [3] SCHMIDT, E., Proc. 4th Int. Cong. Appl. Mech. (Cambridge 1934), p. 92.
- [4] SQUIRE, H. B., *Modern Developments in Fluid Dynamics: High Speed Flow* (ed. L. HOWARTH; Oxford 1953), Chap. 10.
- [5] STEWARTSON, K., *Symposium über Grenzschichtforschung*, Freiburg i. Br. 1954 (unpublished).

Zusammenfassung

Die freie Konvektion an einer beheizten horizontalen Platte wird nach den üblichen Methoden der Grenzschichttheorie untersucht. Weist die wärmeübertragende Plattenseite nach oben, so ist das Problem auf dieser Basis unlösbar, wohl aber findet man eine widerspruchsfreie Lösung, wenn diese Plattenseite nach unten weist. In diesem ist die Nusselt Zahl, die den Wärmeübergang kennzeichnet, proportional der $1/5$ -ten Potenz der Rayleigh Zahl, welche die Beheizung charakterisiert. Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist befriedigend.

(Received: February 27, 1958.)

 Varia – Miscellaneous – Divers

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 3. bis 4. Mai 1958 in Romont

Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik

Quelques considérations sur le développement des compresseurs axiaux transsoniques. Par P. SCHWAAR, Dammarie-les-Lys, France¹).

Pendant longtemps, les constructeurs de compresseurs axiaux se sont systématiquement abstenus de dessiner leurs aubages pour des nombres de MACH supérieurs à ceux reconnus comme limites sur la base des essais de grilles planes²). Ces limites, au-dessus desquelles on fait apparaître une chute rapide du rendement de compression des grilles, se situent approximativement dans un domaine subsonique $0,7 < M_{w\infty} < 0,9$ des vitesses relatives de l'écoulement d'amont, les valeurs inférieure et supérieure correspondant respectivement à des sections d'aubage voisines du moyeu et de la périphérie d'une roue mobile, ceci pour des rapports diamétraux de l'ordre de 0,4–0,5, c'est-à-dire pour les premiers étages de compresseurs couramment utilisés dans les turbomachines d'aviation.

L'évolution de la technique de ces machines vers la réalisation de débits spécifiques de plus en plus élevés, s'est traduite par l'emploi généralisé d'écoulements giratoires rotationnels à l'entrée des compresseurs. Ces types d'écoulement se distinguent des écoulements irrotationnels classiques par une diminution de la composante axiale de la vitesse et une augmentation du moment cinétique du rayon intérieur au rayon extérieur de la veine. Ils permettent ainsi d'éviter les vitesses relatives trop élevées au sommet des ailettes et de réaliser des débits spécifiques optima par une utilisation intégrale des limites subsoniques des nombres de MACH sur toute la hauteur des ailettes. Il en résulte qu'on ne peut obtenir une augmentation appréciable du débit spécifique qu'en dépassant ces limites. Un gain de l'ordre de 20% peut être réalisé en conservant les conditions

¹) Société Nationale d'Etude et de Construction de Moteurs d'Aviation.

²) Nous ne considérons pas ici les compresseurs axiaux supersoniques au sens habituel du terme, dans lesquels on tente de mettre en jeu des nombres de MACH nettement supersoniques sur toute la hauteur des ailettes d'une couronne fixe ou mobile.

d'écoulement subsoniques classiques au moyeu et en autorisant un nombre de MACH relatif légèrement supersonique ($M_{w_{e\infty}} = 1,1 - 1,3$) au rayon extérieur de l'aubage mobile. Ceci revient simplement à rétablir l'écoulement giratoire irrotationnel à l'entrée de la roue, voire à supprimer le distributeur d'entrée, donc à maintenir la vitesse débitante constante sur le rayon.

C'est à cette définition que répond notre conception initiale de l'étage transsonique à taux de compression modéré. Un relèvement du niveau de MACH relatif au rayon intérieur permet un gain supplémentaire de débit et une augmentation proportionnée du taux de compression.

Le caractère essentiel de l'étage transsonique ainsi défini consiste dans la présence d'ondes de choc détachées du bord d'attaque des ailettes mobiles sur une partie plus ou moins importante de leur hauteur et, pour les taux de compression élevés, dans l'utilisation des chocs pour produire une partie au moins du travail de compression de l'étage.

Quelques propriétés importantes de l'écoulement à ondes de choc détachées peuvent être déduites d'une analyse qualitative du fonctionnement transsonique de la grille plane. Dans l'hypothèse de conditions d'écoulement périodiques le long du front de grille, on montre que le passage transsonique du nombre de MACH d'amont M_∞ s'effectue de manière continue si la section de passage minimum de la grille ne bloque pas. La croissance de M_∞ en supersonique peut être limitée par deux circonstances. Une limite inférieure $M_{\infty \max_i}$ correspond à l'apparition d'une configuration de choc en fourche dans la grille. Une limite supérieure $M_{\infty \max_s}$, qui ne peut en aucun cas être dépassée dans le schéma de fonctionnement de la grille (abaissement progressif de la pression statique d'aval) qui correspond aux conditions usuelles d'aspiration d'un étage, est donnée par la condition $M_{\infty \max_s} \sin \alpha_\infty = 1$.

L'évolution transsonique de l'écoulement est profondément influencée par la présence des couches limites, dont l'interaction avec les chocs prend une importance particulière dans la grille, non seulement par les décollements et les pertes qui peuvent en résulter, mais aussi par l'effet de striction supplémentaire que l'épaississement consécutif de la couche limite d'extrados provoque au droit des cols de la grille.

Il y a lieu de compléter les considérations sur le fonctionnement transsonique de la grille plane par quelques indications sur les influences tridimensionnelles, qui jouent un rôle important dans la grille circulaire. Le passage transsonique s'effectue plus aisément dans un aubage de compresseur que dans une grille plane, car les conditions d'écoulement les plus critiques ne s'y produisent pas simultanément, comme dans cette dernière, sur toute la hauteur des ailettes. De plus, les écoulements giratoires irrotationnels engendrent des déplacements radiaux des lignes de courant vers l'extérieur de la veine à la traversée de l'aubage mobile, qui favorisent le déblocage des sections voisines du moyeu et tendent à abaisser le niveau de MACH au droit des chocs, tant à la périphérie qu'au rayon intérieur de la roue, réduisant ainsi l'importance des décollements et des pertes dues à l'interaction chocs-couches limites.

Finalement, il importe de choisir une évolution aéro-thermodynamique globale du fluide telle qu'il en résulte un dessin d'aubage transsonique à cambrure modérée. Des profils à faible épaisseur relative, avec maître-couple reporté loin en arrière du bord d'attaque, et l'adoption de charges aérodynamiques modérées contribuent efficacement à éviter les grandes survitesses d'extrados. Ces conditions ne sont pas toujours compatibles avec le but final recherché, de sorte que

le dessin d'un étage transsonique procède généralement d'un compromis qui affecte plus ou moins son rendement.

Les données suivantes ont été adoptées pour le dessin d'un des étages transsoniques expérimentaux réalisés à la SNECMA:

$M_{w_i} = 0,700$, $M_{w_e} = 1,324$, vitesse périphérique $U_e = 422$ m/s,

rapport diamétral $\nu = 0,45$, taux de compression $\pi_{tot} = 1,26$,

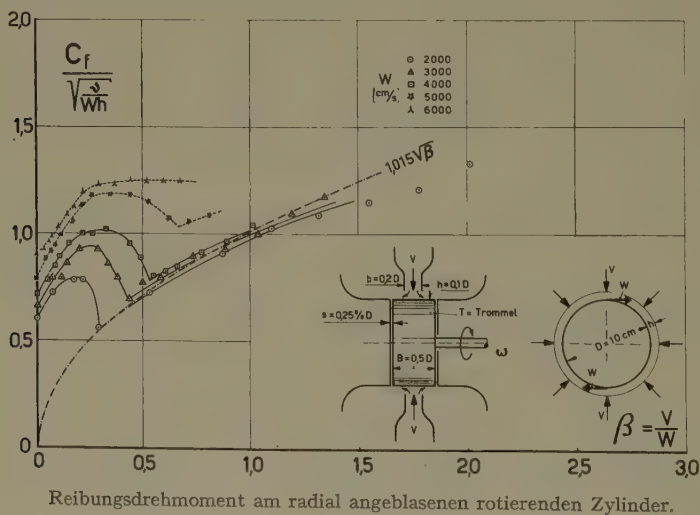
débit rapporté à la section frontale $D_s = 160$ kg/m² s (INA O).

Aux essais, le débit et le taux de compression prévus ont été réalisés au régime d'adaptation avec un rendement adiabatique de 84% de l'ensemble (distributeur amont + roue mobile + redresseur) et une marge de pression au pompage largement suffisante ($\pi_{tot\max} = 1,385$). L'analyse détaillée des conditions d'écoulement dans cet étage nous a permis de confirmer dans une large mesure la validité des considérations présentées dans cette brève étude.

Une publication détaillée est prévue dans «Technique et Science Aéronautiques».

Über Reibung und Grenzschicht-Stabilität an rotierenden angeblasenen Zylindern. Von J. ACKERET, Zürich³⁾.

In Zusammenhang mit Untersuchungen über Sekundärströmungen haben wir (Verfasser und H. SPRENGER) einen einfachen Versuch gemacht, der auch selbständiges Interesse bietet.



Ein rotierender Zylinder (siehe Figur) wird radial am ganzen Umfang angeblasen und das Drehmoment bei verschiedenen Anblas- und Drehgeschwindigkeiten gemessen.

³⁾ Institut für Aerodynamik der ETH.

Im laminaren Fall folgt die Grenzschicht einem exakten und einfachen Gesetz: sie ist auf der ganzen Zylinderoberfläche von konstanter Dicke, falls der Zustrom entsprechend einer Staupunktströmung ($u = a x$, $v = -a y$) erfolgt. Die Reibungsspannung τ_0 am Umfang ist überall von gleichem Betrag und folgt nach der Theorie zu

$$C_f = \frac{\tau_0}{(\varrho/2) W^2} = 1,15 \frac{\sqrt{a v}}{W},$$

wo W die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders ist. Bei unserem Versuch (Figur) floss die Luft aus einer Parallel-Ringdüse, die von der Zylinderoberfläche den Abstand h hatte. Für diesen etwas veränderten Zustrom ergibt sich

$$a = 0,775 \frac{V}{h},$$

wo V die (radiale) Geschwindigkeit in der Mündung der Ringdüse bedeutet.

Führt man noch das Verhältnis $\beta = V/W$ ein, so ergibt sich

$$C_f = 1,015 \sqrt{\frac{v}{W h}} \sqrt{\beta},$$

welcher Wert in guter Übereinstimmung mit den Messungen ist, falls V genügend gross ist.

Bei kleinem β tritt Übergang zur Turbulenz ein. Man kann vermuten, dass durch Zentrifugalkräfte zuerst instabile, aber geordnete Wirbel mit Achsen ungefähr in peripherer Richtung entstehen, wie sie von TAYLOR und GÖRTLER näher betrachtet wurden. – Das Kriterium

$$\frac{W \vartheta}{v} \sqrt{\frac{\vartheta}{R}} = k,$$

wo ϑ die Impulsmangeldicke und R der Zylinderradius ist, wird mit $k \sim 2$ erfüllt, was plausibel erscheint. Der Zerfall dieser Görtler-Wirbel würde dann zur eigentlichen Turbulenz führen.

Beispiele zur Theorie der Flügelgitter. Von L. MEYER, Zürich⁴).

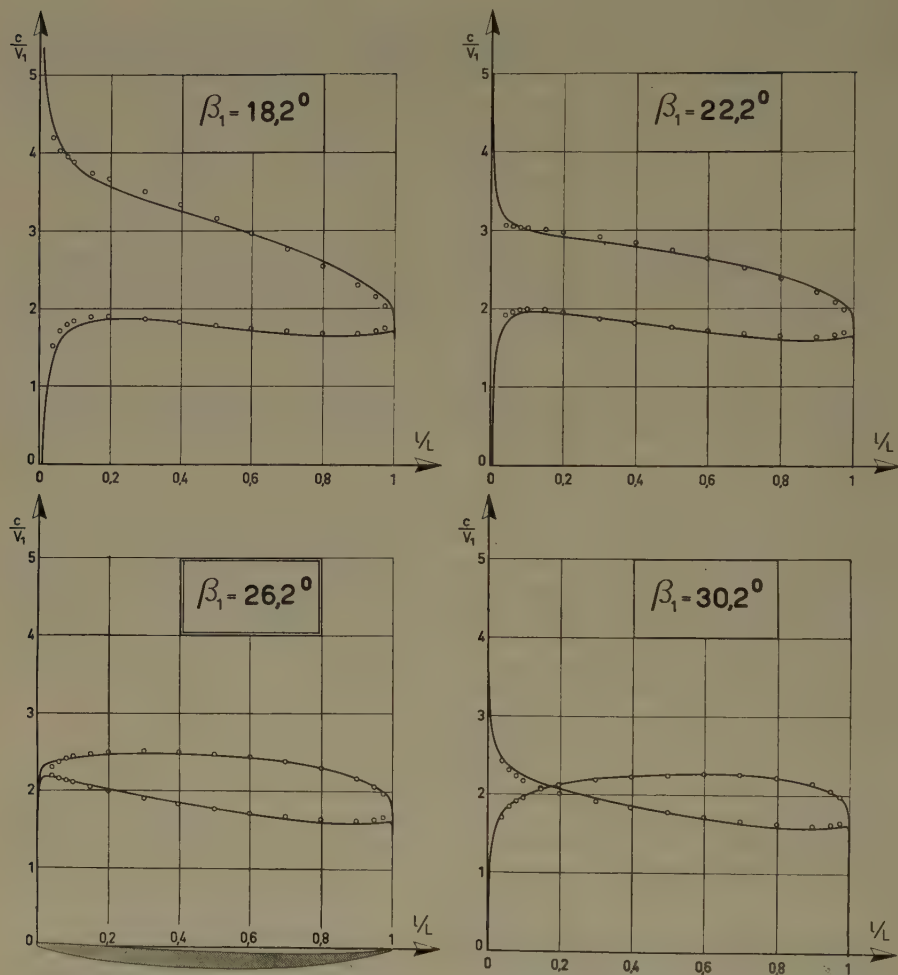
Zur Prüfung der am Institut für Aerodynamik der ETH entwickelten, auf reibungsfreier Strömung basierenden Berechnungsmethode für Schaufelprofile von axialen Turbomaschinen wurden Messungen an Schaufelgittern im elektrolitischen Trog durchgeführt.

Nachdem eine genügende Messgenauigkeit erreicht war⁵), wurden mehrere verschiedenartige Profile untersucht. Die hier wiedergegebene Figur zeigt zum Beispiel die gerechneten und gemessenen Geschwindigkeiten an einem 5% dicken Profil für Axialverdichter bei stossfreiem Eintritt ($\beta_1 = 26,2^\circ$) sowie bei geänderter Anströmrichtung. Es konnte eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung festgestellt werden⁶).

⁴) Institut für Aerodynamik der ETH.

⁵) L. MEYER, *Zur Theorie der Flügelgitter*, Z. angew. Math. Phys. 8, Fasc. 4 (1957).

⁶) Ein ausführlicher Bericht wird in den «Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH», herausgegeben von Prof. Dr. J. ACKERET, erscheinen.



Profil für Axialverdichter. Gerechnete und gemessene Geschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen Anström winkeln; die Bezugsgeschwindigkeit V_1 ist die zur Gitterrichtung normale Komponente der Eintrittsgeschwindigkeit.

Über die Belüftung von Autostrassen-Tunnel. Von A. HAERTER, Zürich⁷⁾.

Zur genügenden Verdünnung der Fahrzeugabgase in der Tunnelluft sind Strassentunnel mit Lüftungsanlagen auszustatten. Beim System der Querlüftung wird aus einem parallel zum Verkehrsraum laufenden Zuluftkanal Frischluft in den Verkehrsraum eingeführt und die Tunnelluft wieder in einen Abluftkanal abgesogen.

⁷⁾ Institut für Aerodynamik der ETH.

Die Druck- und Geschwindigkeitsverläufe in den Luftkanälen berechnen sich nach untenstehendem Gleichungssystem:

$$\frac{d\pi_{az}}{d\xi} = \mp \lambda \frac{L}{D} \omega_{az}^2 - K_{az} \frac{d\omega_{az}^2}{d\xi},$$

$$\frac{d\omega_{az}}{d\xi} = - \frac{f/\sqrt{1+\zeta}}{F/L} \sqrt{\pm \pi_{az} + \beta \omega_{az}^2 \mp \pi_v},$$

wobei

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \omega_{az} = \frac{u_{az}}{u_{az_0}}, \quad \pi_{az} = \frac{p_{az}}{(\varrho/2) u_{az_0}^2},$$

$\lambda L/D$ Rohrreibungsfaktor, f Schlitzöffnung pro $d\xi$, F Kanalquerschnitt, ζ Umlenk- und Reibungsverlustfaktor für Schlitz, $K_z \beta_z$ von Grenzschicht abhängig, K_a von v_z/u_a abhängig (v Einstromgeschwindigkeit), a Abluftkanal, v Verkehrsraum, z Zuluftkanal.

Die Randbedingungen lauten $\xi = 0, \omega = 1$; $\xi = 1, \omega = 0$.

Für den Fall konstanter Schlitzöffnungen und konstanten Kanalquerschnitts ist die Mengenverteilung längs des Kanals einerseits von $\lambda L/D$ und andererseits von

$$\frac{f/\sqrt{1+\zeta}}{F/L},$$

das heisst vom Druckniveau des Kanals gegen aussen abhängig. Wird eine einigermaßen gleichmässige Verteilung verlangt, so muss der mittlere Druckunterschied gegen aussen im allgemeinen gross sein.

Durch Einstellen der Schlitzze kann natürlich eine gleichmässige Verteilung auch für kleine Druckunterschiede gegen aussen erzielt werden, wie es bei der Tunnelventilation zwecks Leistungersparnis gemacht wird. Beobachtungen am Schelde-Tunnel in Antwerpen zeigten aber, dass beim Betrieb mit kleinerer Luftmenge als jener, für welche die Schlitzze eingestellt wurden, die Kanäle die Luft nicht mehr gleichmässig verteilten.

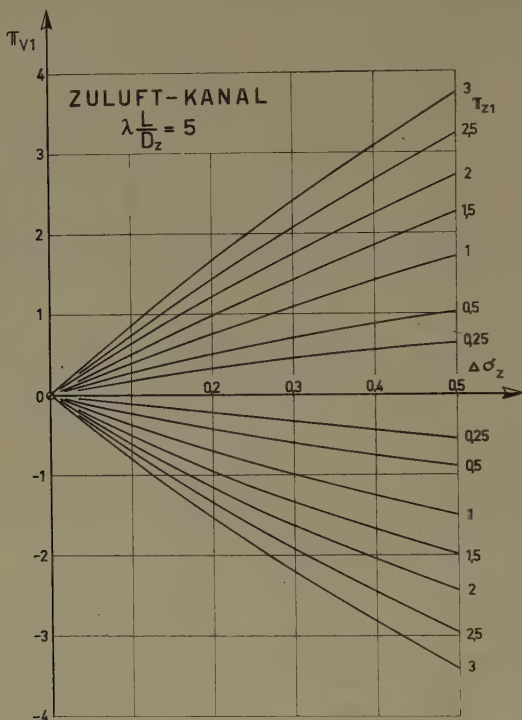
Dafür ergeben sich nun zwei Erklärungen:

Eine Ursache liegt in der Änderung der Reynolds-Zahl entsprechend der Mengenänderung, sie bringt aber bei Verhältnissen, wie sie bei der Tunnelventilation vorliegen, nur kleine Abweichungen.

Die Hauptursache ist die, dass der Druck im Verkehrsraum nicht immer konstant ist, wie für die Schlitzzeinstellung angenommen wurde. Atmosphärische und bei Tunnelsteigungen auch thermostatische Einflüsse bewirken Druckgradienten im Verkehrsraum, und der Luftwiderstand der durchfahrenden Fahrzeuge, der sich im Tunnel in einem Druckunterschied vor und hinter dem Wagen äussert, ergibt merkliche Druckveränderungen. Am Modellversuch wurde durch Kraftwägung und Druckabfallmessungen der Einfluss der Tunnelwände und des Fahrzeugabstandes auf den Luftwiderstand auch gemessen. Diese Druckänderungen können sich nun speziell bei kleinen Luftmengen auswirken, die nur noch unter geringem Über- bzw. Unterdruck gegen den Verkehrsraum stehen.

Um den Einfluss der Druckgradienten allgemein überblicken zu können, wurde im Bereich der möglichen Kanalabmessungen (durch $\lambda L/D$ charakterisiert) und der möglichen Druckunterschiede π_{v1} zwischen Kanalansatz und -ende für verschiedene Unter- bzw. Überdrücke π_{az1} am Kanalende der maximale Unterschied im Vergleich zur mittleren Menge $\Delta\sigma_{az}$ berechnet. Die umfangreichen

Rechnungen konnten auf der Contraves-Analogie-Rechenmaschine durchgeführt werden. Ein Beispiel der aufgestellten Kurvenblätter gibt unsere Figur. Mit diesen Berechnungen wird es somit möglich sein, Belüftungskanäle optimal ausulegen.



Druckgradienten im Verkehrsraum π_{v1} (Druckunterschied über gesamte Kanallänge, bezogen auf den Eintrittstaudruck im Zuluftkanal) ergeben Abweichungen $\Delta \sigma_z$ von der gleichmässigen Verteilung, je nach Kanalüberdruck π_{z1} (Überdruck am Kanallende).

Über die Möglichkeit magnetohydrodynamischer Kreisel. Von P. MAEDER, Zürich⁸⁾.

Eine ausführliche Veröffentlichung in der ZAMP erfolgt später.

Systematische Herleitung logischer Schaltungen. Von H. GLÄTTLI, Zürich⁹⁾.

In vereinfachter Darstellung besteht das vorgeschlagene Verfahren aus folgenden Schritten:

1. Systematische Komposition von Elementar-Schaltkreisen.
2. Klassierung der erhaltenen Schaltkreise zwecks Erstellung eines Katalogs der mit Kompositionen aus $R \leq R_0$ Grundsaltungen darstellbaren Funktionen.

⁸⁾ Zurzeit Institut für Aerodynamik der ETH.

⁹⁾ IBM-Forschungslaboratorium.

3. Abtastung der in Frage kommenden Teile des Katalogs entsprechend der zu realisierenden Schaltfunktion; Versuch, die im Katalog enthaltenen Funktionen mit der zu realisierenden in Deckung zu bringen, nötigenfalls durch Gleichsetzung oder Fixierung von überzähligen Variablen.

Ausgehend von der Tatsache, dass alle Vorgänge in Schaltkreisen, die kapazitive und induktive Elemente enthalten, einzeln durch Gleichstromschaltkreise dargestellt werden können, werden 6 Elementarschaltkreise, bestehend aus je einem nichtlinearen Element (Diode, pnp-Transistor, npn-Transistor oder Hochvakuumtriode) in Verbindung mit einem Ohmschen Widerstand, eingeführt.

Alle Anschlüsse werden als variable Eingänge aufgefasst. Spannungen werden nur qualitativ angegeben.

Die logischen Funktionen von Kompositionen lassen sich in Boolescher Algebra durch einfache Substitution herleiten. Ein geeigneter Bezeichnungscode liefert Angaben über Art, Anzahl und Verknüpfung der verwendeten Elementarkreise sowie über die Impedanzverhältnisse.

Zur Klassierung der äusserst allgemeine Funktionen darstellenden Kompositionen werden Abzählmethoden herangezogen. Sie erweisen sich deshalb als erfolgreich, weil jede Variable ein- und nur einmal sowie nur in positiver oder nur in negierter Form auftritt.

Eine zu realisierende, in Boolescher Algebra vorgegebene Funktion wird nach ähnlichen Gesichtspunkten durch «Koordinaten» charakterisiert, wie sie bei der Klassierung gelten.

Gesetzmässigkeiten des Verfahrens gestatten eine rasche Bezeichnung von relativ eng begrenzten Katalogteilen, welche potentielle Lösungen enthalten können.

Demzufolge gestattet das Verfahren Aussagen der folgenden Art:

«Zur Realisierung einer bestimmten logischen Funktion bestehen für eine vorgegebene Maximalzahl R_0 von nichtlinearen Elementen folgende und nur folgende Möglichkeiten.»

Dieses vereinfachte Verfahren wird für den Fall $R_0 = 2$ simuliert. Als erstes Beispiel weist $X = AB' + A'B$ («exclusive or») zwei Lösungen auf, während $X = A(B + C) + BC$ eine einzige Lösung hat. Nebenbei sei bemerkt, dass für $X = AB + A'B'$ keine Funktion mit zwei Variablen eine Lösung für $R_0 = 2$ existiert.

In einer verfeinerten Form des Verfahrens werden Gesetzmässigkeiten des Aufbaus logischer Funktionen dazu verwendet, um nur noch begrenzte, durch das Problem bestimmte Teile des Katalogs zu entwickeln. Dies ermöglicht die Behandlung komplizierterer Probleme.

Als Besonderheiten der Methode sind zu erwähnen: Vollständigkeit (Garantie für Lösung mit geringstem Aufwand) sowie die Möglichkeit der maschinellen Durchführung (hinreichend exakte Formulierung).

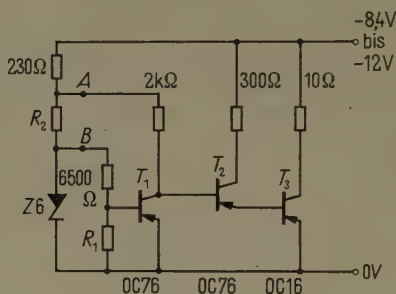
Ein einfacher Thermostat mit Transistoren. Von E. BALDINGER und A. MAIER, Basel¹⁰⁾.

Die Temperaturabhängigkeit der Transistoreigenschaften stört in manchen Anwendungen, speziell wenn hohe Anforderungen an Genauigkeit und Konstanz gestellt werden. Wohl ist durch geeignete Schaltungen eine weitgehende Kompensation von Temperatureffekten möglich. Häufig wird aber die Lösung eines

¹⁰⁾ Physikalische Anstalt der Universität, Abteilung für angewandte Physik.

Schaltungsproblems wesentlich erleichtert oder gar erst ermöglicht, wenn ein Teil der Schaltung in einem Thermostaten untergebracht werden kann.

Wir haben einen einfachen Thermostaten entwickelt, der in Betriebsspannung und Betriebssicherheit einer Transistorschaltung angepasst ist (Figur 1). Als



Figur 1

Schaltschema des Transistor-Thermostaten. Mit $R_1 = 150 \Omega$ ergab sich eine Gleichgewichtstemperatur von 46°C . $R_2 = 10 \Omega$.

Temperaturindikator dient der Transistor T_1 mit festgehaltener Basisspannung¹¹⁾. Bei fallender Temperatur sinkt sein Kollektorstrom. Dadurch wird der Heizstrom, der durch T_3 gesteuert wird, vergrößert. T_2 reduziert, als Emitterfolgestufe, die Belastung von T_1 . Mit Hilfe der Zener-Diode gelingt es, die Gleichgewichtstemperatur des Thermostaten von der Speisespannung unabhängig zu machen: R_2 wird gegenüber dem Innenwiderstand der Zener-Diode derart justiert, dass sich die Spannungsschwankungen an den Punkten A und B¹²⁾ in ihrer Auswirkung auf den Heizstrom so weit kompensieren, dass die *gesamte Heizleistung* (bei gleichbleibender Temperatur) sich nicht ändert.

Die Versuchsausführung des Thermostaten besteht aus einem 3 mm starken, beidseitig geschlossenen Messingzylinder von 5 cm Durchmesser und 5 cm Höhe. Im Innern ist die Regelschaltung (Figur 1) ausser dem Heizwiderstand von 10Ω untergebracht, der auf dem Messingzylinder aufgewickelt ist. Der nutzbare Innenraum beträgt 60 cm^3 , was jedoch keine obere Grenze darstellt. Die Wärmeabgabe nach aussen ist durch eine allseitig 2 cm dicke Schicht von Polystyrolschaum auf $75 \text{ mW}/^\circ \text{C}$ reduziert.

Der Thermostat wurde mittels R_1 auf eine Gleichgewichtstemperatur von 46°C eingestellt. Der Temperatur-Stabilisierungsfaktor betrug 50 und der Spannungsbereich $8,4 \text{ V} \div 12 \text{ V}$. Die Kurzzeitkonstanz über 4 Stunden war besser als die Messgenauigkeit von $\pm 0,015^\circ \text{C}$. Über die Langzeitkonstanz orientiert Figur 2. Bei der Beurteilung des Driftes von $0,2^\circ \text{C}$ im Dauerversuch von einem halben Jahr ist zu beachten, dass ausser der Alterung der Transistoren und der Zener-Diode auch eine Alterung der verwendeten Kohlewiderstände (Resista, $1/2 \text{ Watt}$) eine Rolle spielen kann. Die Streuung der Messpunkte dürfte vom Einfluss der Umgebungstemperatur auf den einfachen Referenzthermostaten herrühren. Dieser wies einen schlechten Temperatur-Stabilisierungsfaktor (rund 20) auf, seine Langzeitkonstanz war jedoch durch die Verwendung eines Hg-Kontaktthermo-

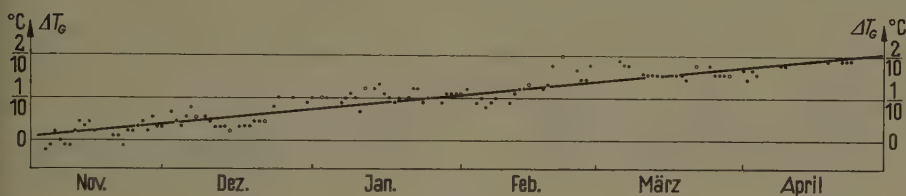
¹¹⁾ E. BALDINGER und W. CZAJA, Z. angew. Math. Phys. 9, 22ff. (1958).

¹²⁾ Unter Umständen müssen die Anschlüsse bei A und B vertauscht werden.

meters gesichert. Obwohl die Messresultate, gemäss der festgestellten Korrelation mit der Zimmertemperatur, korrigiert wurden, bleiben infolge der Trägheit der Anordnung Restfehler bei *schnellen* Änderungen der Zimmertemperatur.

Eine Verbesserung der Temperaturstabilisierung des Transistor-Thermostaten kann durch Erhöhung der Verstärkung der Regelschaltung erreicht werden. Einfache Möglichkeiten sind:

- Ersatz von T_2 durch eine Verstärkerstufe mit einem npn-Transistor;
- Einfügung eines kleinen gemeinsamen Emitterwiderstandes für T_1 und T_3 zur Erzielung positiver Rückkopplung.



Figur 2

Gang ΔT_G der Gleichgewichtstemperatur des Transistor-Thermostaten.

Versuche dieser Art sollen in Verbindung mit einem besseren Referenzthermostaten unternommen werden.

Für die finanzielle Unterstützung dieser Untersuchungen sind wir der Stiftung Hasler-Werke zu Dank verpflichtet.

Ein stabilisiertes Netzgerät hoher Güte mit Transistoren. Von E. BALDINGER und W. CZAJA, Basel¹³⁾.

Bereits früher haben wir über ein stabilisiertes Netzgerät mit Transistoren berichtet, das einen Stabilisierungsfaktor von rund 1000 und einen Innenwiderstand von etwa 1 mΩ aufwies¹⁴⁾.

Eine Verbesserung dieser Daten ist dann möglich, wenn eine Verbesserung der Referenzspannung gelingt¹⁵⁾.

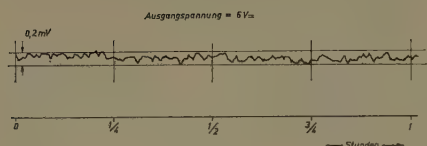
Im folgenden wird über ein stabilisiertes Netzgerät mit Transistoren berichtet, dessen Stabilisierungsfaktor bei einer Ausgangsspannung von 6 V etwa zwischen 0,5 bis $1,0 \cdot 10^4$ (ohne Kompensation) liegt und das einen Innenwiderstand von etwa 0,2 mΩ aufweist. Die Ausgangsspannung ist variabel zwischen 1 und 17 V, und die Ausgangsleistung beträgt maximal 15 W, wobei ein Laststrom von 2,5 A nicht überschritten werden darf. Ferner ist das Gerät kurzschlußsicher [die Daten sind gleich wie in ¹⁵⁾]. Eine Ausgangsspannung von beispielsweise 6 V ist während 1 Stunde besser als $\pm 0,1$ mV konstant (Figur 1). Die Rippelspannung am Ausgang beträgt weniger als 0,1 mV. Das gesamte stabilisierte Netzgerät weist etwa die Dimensionen eines 1-kW-«Soerensen»-Stabilisators auf.

¹³⁾ Physikalische Anstalt der Universität, Abteilung für angewandte Physik.

¹⁴⁾ E. BALDINGER und W. CZAJA, Z. angew. Math. Phys. 8, 324 (1957).

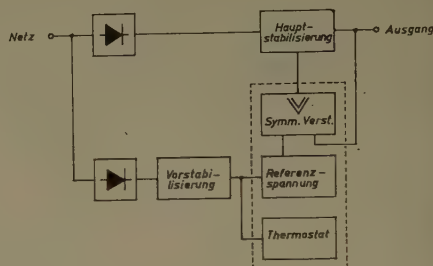
¹⁵⁾ E. BALDINGER und W. CZAJA, Z. angew. Math. Phys. 9, 1-25 (1958).

Figur 2 zeigt das Blockdiagramm des Gerätes. Als Thermostat wurde ein Transistor-Thermostat¹⁶⁾ mit einer Ölfüllung verwendet. Zur Vermeidung unkontrollierbarer Temperaturdifferenzen im Apparat selber ist ein Gebläse zur Kühlung eingebaut.



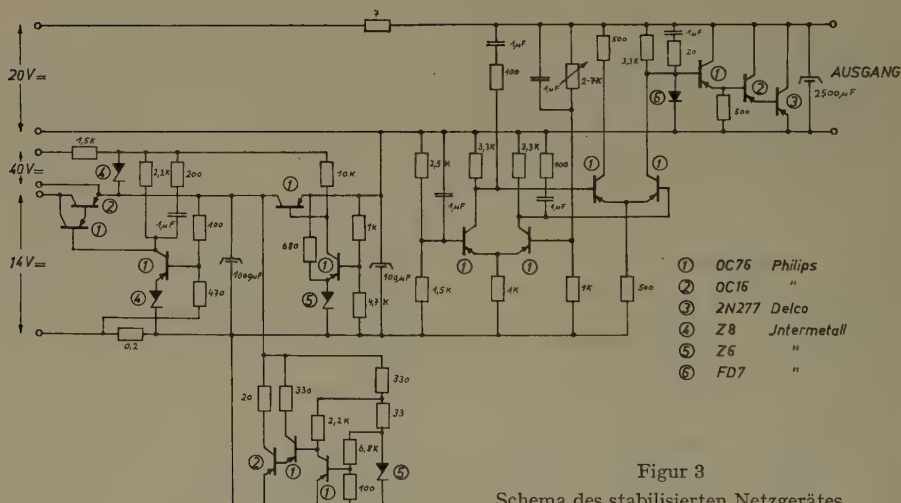
Figur 1

Vorläufige Messung der Ausgangsspannung.
Vergleich mit 6-V-Bleiakkumulator.



Figur 2

Blockschema des stabilisierten Netzgerätes.
..... deutet die im Thermostat untergebrachten Schaltungen an.



Figur 3

Schema des stabilisierten Netzgerätes.

Die Transistoren und Widerstände der Schaltung in Figur 3 sind nicht ausgesucht. Es wurde lediglich der symmetrische Verstärker durch passende Wahl der Spannungsteiler bei der Arbeitstemperatur des Thermostaten (etwa 40°C) symmetriert. In der Schaltung wurden ausschliesslich Drahtwiderstände verwendet und Elektrolytkondensatoren nur dort, wo eine Veränderung tolerierbar ist.

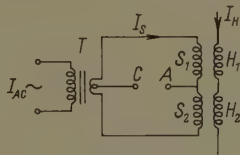
Diese Untersuchungen wurden aus Mitteln der Stiftung Hasler-Werke finanziert, wofür wir unseren Dank aussprechen.

¹⁶⁾ E. BALDINGER und A. MAIER, siehe voranstehenden Bericht.

Ein supraleitender Gleichrichter und Verstärker. Von J. L. OLSEN, Zürich¹⁷⁾.

Viele Experimente bei der Temperatur des flüssigen Heliums erfordern relativ grosse Gleichströme bei sehr niedrigen Spannungen. Um solche Ströme zu liefern, ohne dass zu grosse Wärmemengen in den Kryostaten eingeführt werden, wäre ein in Helium arbeitender Transformator mit einem passenden Gleichrichter zweckmässig. Jedoch fehlte bisher ein einfacher, bei tiefen Temperaturen arbeitender Gleichrichter.

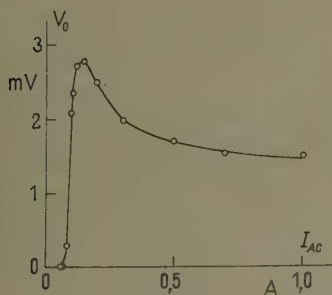
Wir haben jetzt die in Figur 1 gezeigte Schaltung zur Lösung dieses Problems untersucht¹⁸⁾. Der Sekundärstrom I_s des Transformators T wird durch die beiden



Figur 1
Schaltbild.

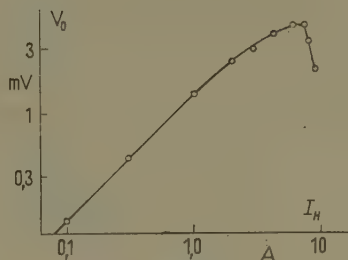
aus supraleitendem Material gewickelten Spulen S_1 und S_2 geführt. Übersteigt I_s einen gewissen Grenzwert I_0 , so wird in S_1 und S_2 während Teilen der Periode die Supraleitung zerstört und ein Anstieg von I_s über I_0 erschwert. Durch Anlegen eines axialen Magnetfeldes auf S_1 und S_2 wird der Absolutwert von I_0 von der Stromrichtung abhängig, und mit passender Wahl der Richtung des von den Feldspulen erzeugten Feldes wird eine Gleichspannung zwischen den Punkten A und C entstehen.

In einer kürzlich untersuchten experimentellen Ausführung dieser Schaltung hatte der Transformator T 1000 Primärwicklungen und 4 Sekundärwicklungen. Der ganze Sekundärkreis wurde aus Lötzinndraht von 0,6 mm Durchmesser gemacht, da dieses Material etwa die supraleitenden Eigenschaften von Blei, aber viel günstigere mechanische Eigenschaften besitzt. S_1 und S_2 bestanden je aus



Figur 2

V_0 in Funktion von I_{AC} für $I_H = 0,5$ A.



Figur 3

V_0 in Funktion von I_H für $I_{AC} = 110$ mA.

¹⁷⁾ Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik der ETH.

¹⁸⁾ Siehe auch J. L. OLSEN, Rev. Sci. Inst. 1958 (im Druck).

10 dicht aneinander plazierten Windungen von 2 mm Innendurchmesser. H_1 und H_2 hatten 40 Windungen pro Zentimeter.

In den Figuren 2 und 3 zeigen wir die Ausgangsspannung V_0 zwischen A und C ; wobei wir in Figur 2 den Feldstrom I_H konstant auf 0,5 A und in Figur 3 den Primärstrom I_{AC} des Transformators konstant auf 110 mA halten.

Es ist klar, dass dieses Gerät ausser als Gleichstromgenerator auch als Verstärker verwendet werden kann. Mit supraleitenden Feldwicklungen, einer Eingangsimpedanz von $2 \cdot 10^{-6} \Omega$ und einem Belastungswiderstand von $2 \cdot 10^{-4} \Omega$ erzielten wir einen Stromverstärkungsfaktor von 10 und eine Spannungsverstärkung von 200.

Diese Arbeit wurde aus einem Arbeitsbeschaffungskredit des Bundes finanziell unterstützt.

Ein nichtlinearer Verstärker zur Verkürzung von Impulsflanken. Von W. BEUSCH, D. MAEDER¹⁹⁾ und R. MÜLLER, Zürich²⁰⁾.

Bei der Spektroskopie von γ -Quanten mit anorganischen Szintillatoren liefert die Anode des Photo-Elektronenvervielfachers einen mit der Zeitkonstante $\tau = 0,3 \mu s$ (für NaJ) exponentiell abklingenden Strom. Für Koinzidenzmessungen hoher Zeitauflösung muss ein kleiner Bruchteil dieses Stromimpulses ein Signal auslösen, das heisst im wesentlichen eine Gitterkapazität aufladen. Der hier beschriebene Verstärker steuert eine Endstufe innert 4 ns aus, wenn die Photoröhre impulsförmig mindestens $5 \mu A$ liefert. Er gestattet hohe Koinzidenzauflösung auch ohne Elektronenvervielfacher mit extremer Verstärkung.

Die Anstiegszeit des ganzen Verstärkers ist wesentlich höher als die genannten $4 ns^{21)}$. Weil der Verstärker in jedem Fall übersteuert wird, bestimmt die Zeit, welche er für die ersten 10% des Anstiegs benötigt, die minimale Dauer des Koinzidenzsignals. Der Verstärker besteht aus 8 Röhren, welche je 1,3- bzw. 8fach verstärken. Die Anstiegszeit für eine einzelne Anode ist ungefähr $RC = 5 ns$. Wären die Arbeitswiderstände rein ohmisch, so würde der 8stufige Verstärker für die ersten 10% des Anstiegs 25 ns, für die nächsten 80% weitere 30 ns benötigen, wäre also für unsere Zwecke unbrauchbar; vor allem, weil die Zeit für die ersten 10% noch stark von der Impulsamplitude abhängt.

Die Induktivitäten L_2 und die Trimmerkondensatoren bilden mit den Anoden- und Gitterkapazitäten ein doppeltes π -Glieder einer Laufzeitkette. Die Kapazitäten werden teilweise kompensiert, und es resultiert eine von der Impulsamplitude unabhängige Laufzeit im Verstärker. Die Wirkungsweise des Kopplungsgliedes kann so veranschaulicht werden: Die beiden Spulen von L_2 bilden einen Transformator, der einen zum Beispiel negativen Impuls unverzögert mit positivem Vorzeichen überträgt. Dazu wird der ganze Impuls mit unverändertem Vorzeichen, aber mit der Verzögerung des doppelten π -Gliedes überlagert. Das resultierende Überschwingen ist in Figur 2, oben, sichtbar, desgleichen die Tatsache, dass die ersten 10% des Anstiegs jetzt am raschesten durchlaufen werden.

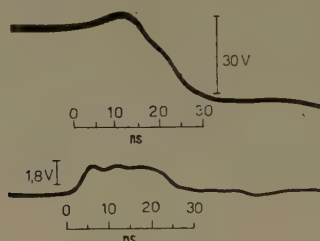
Berechnungen haben ergeben, dass der Verlauf der ersten 10% des Anstiegs ziemlich kritisch von der Kopplung abhängt und dass $k = 0,7$ der günstigste Wert ist, was durch das Experiment bestätigt wurde.

¹⁹⁾ Zur Zeit am ORNL., Oak Ridge, Tennessee.

²⁰⁾ Physikalisches Institut der ETH.

²¹⁾ Ein Kettenverstärker mit $3 \cdot 10$ Röhren könnte zum Beispiel bei 1000facher Verstärkung diese Anstiegszeit besitzen.

Bei der Figur 2 wurden auf den Eingang des Verstärkers exponentiell mit $\tau = 0,3 \mu\text{s}$ ansteigende Impulse der Amplitude $0,2 \text{ V}$ gegeben. Eine Vergrößerung der Amplitude um einen Faktor 10 veränderte die Form des Impulses nur unwesentlich, er erschien um 5 ns früher.



Figur 2

Oszillogramme der Impulse am Ausgang. Oben: Impulsform mit «Überschwingen» nach der 4. Doppelstufe. Das Überschwingen wird durch die nachfolgende Seriediode nicht übertragen. Unten: Impulsform nach der Endstufe. Zur Kontrolle der Zeitbasis wurde die Länge des Rechteckimpulses mit einem kurzgeschlossenen Kabel auf 20 ns begrenzt.

Un amplificateur pour spectrophotomètre. Par R. DESSOULAVY, J. DURAND et E. LÜSCHER, Lausanne et Herisau²²⁾.

Comme décrit²³⁾, le spectrophotomètre Metrohm utilise un faisceau lumineux interrompu périodiquement et mesuré par une photocellule à vide.

Il s'agit d'avoir un amplificateur à courant alternatif dont le gain peut être ajusté en 8 pas de 10 db . La précision requise est de $\pm 0,5\%$ dans toute la gamme de lecture. La sensibilité doit être limitée par le bruit de la résistance d'entrée R .

Rapport signal / bruit

Le phototube peut être assimilé à une source de courant I traversant la résistance de charge R . Le rapport signal/bruit est:

$$\frac{U_s}{U_B} = \frac{RI}{\sqrt{4kT\Delta fR}} \sim \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\Delta f}} I.$$

Il y a donc intérêt à avoir R aussi élevé que possible. Une limite de R est toutefois fixée par l'effet des capacités parasites, effet d'autant plus faible que la fréquence est plus basse. Nous avons choisi $R = 400 \text{ M}\Omega$ et $f = 10 \text{ Hz}$. Avec ces valeurs, le bruit de la lampe d'entrée est négligeable (R équivalant $\cong 1 \text{ M}\Omega$)²⁴⁾.

Largeur de bande

A une fréquence aussi basse, de simples filtres RC , passe-bas et passe-haut, permettent d'obtenir une largeur de bande de l'ordre de 12 Hz .

L'amplitude du signal étant généralement beaucoup plus grande que celle du bruit, il n'y a pratiquement aucun avantage à utiliser un redresseur en phase²⁵⁾.

²²⁾ Laboratoire Metrohm.

²³⁾ Z. angew. Math. Phys. 8, 223 (1957).

²⁴⁾ J. DALBERT, Le Vide 52, 200 (1954).

²⁵⁾ R. A. SMITH, Proc. Electr. Eng. 98, 43 (1951).

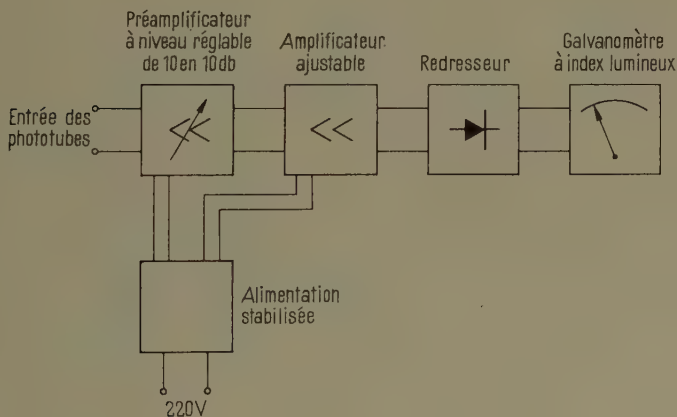
Sensibilité

Avec l'amplification maximum, la déviation totale de l'instrument de mesure est donnée par un signal de $1 \cdot 10^{-12}$ A. Ce courant correspond à une intensité de lumière de 0,045 μlm (avec un phototube 90 AV Philips et une lampe de température de couleur de 2700° K).

En l'absence de signal et pour l'amplification maximum, le bruit thermodynamique de la résistance d'entrée provoque une déviation de 3 à 4% de la déviation totale. En présence d'un signal suffisant, le bruit ne provoque plus de déviation, mais seulement des fluctuations de la valeur lue.

Montage

Le redresseur utilise 2 diodes au silicium présentant une grande résistance inverse, même à une température élevée. Il possède une caractéristique de redressement extrêmement linéaire (écart de linéarité de $\pm 0,3\%$ de la valeur maximum) car il est alimenté par une source à haute impédance (pentode sous-alimentée).



Conclusions

Cet amplificateur permet de mesurer avec précision des flux lumineux dans une gamme d'intensité variant de 1 à 100 000. Sa sensibilité est à la limite de ce que peut donner un appareil industriel avec cellule à vide.

Klystron stabilisé en phase. Par P. KARTASCHOFF, Neuchâtel²⁶⁾.

Dans une communication antérieure nous avons décrit un spectrographe à haute résolution utilisant un klystron stabilisé en phase sur une harmonique élevée de l'oscillation d'un quartz²⁷⁾.

²⁶⁾ Laboratoire suisse de Recherches horlogères.

²⁷⁾ J. BONANOMI, J. DE PRINS, J. HERRMANN et P. KARTASCHOFF, *Helv. Phys. Acta* 30, 290 (1957).

La fréquence du quartz est balayée par une réactance variable (figure 1). La self L_2 varie grâce à la saturation du noyau en ferrite. Une polarisation appropriée permet d'obtenir une bonne linéarité du balayage.

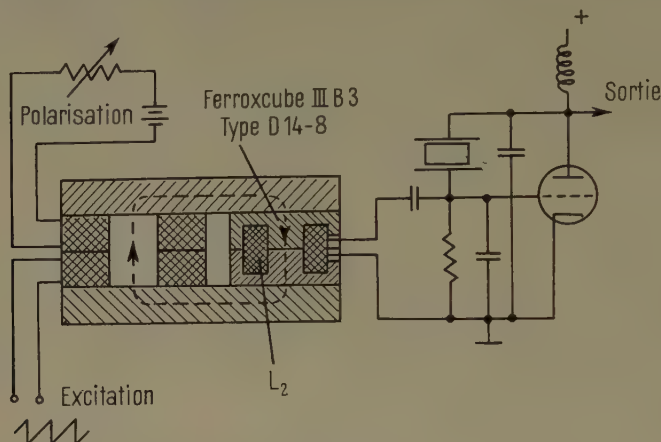


Figure 1

Oscillateur à quartz balayé en fréquence par une self variable.

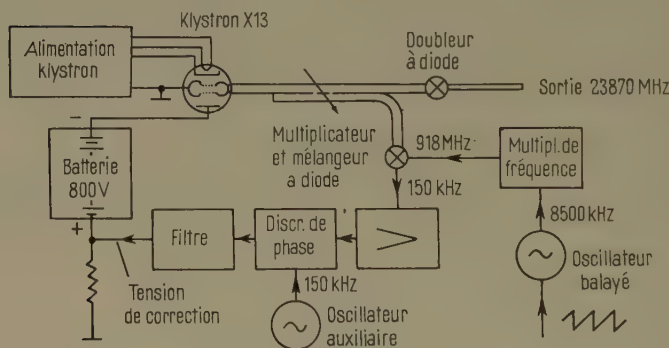


Figure 2

Circuit de stabilisation en phase d'un oscillateur klystron.

Pour que le domaine de maintien de la synchronisation du klystron soit plus grand que celui du balayage maximum il faut que le gain de la boucle d'asservissement soit suffisant. Les propriétés du filtre de la tension de correction (figure 2) permettent un gain plus élevé que dans le circuit original de PETER et STRANDBERG²⁸⁾.

Nous avons obtenu sans difficulté un domaine de synchronisation de 7 MHz autour de la fréquence de 24 000 MHz. Le balayage était de quelques centaines de kHz.

²⁸⁾ M. PETER and M. W. P. STRANDBERG, Proc. Inst. Radio Engrs. 43, 869 (1955).

La fréquence auxiliaire était de 150 kHz mais elle peut être choisie entre 100 kHz et plusieurs MHz, la limite supérieure étant donnée par l'amplificateur et le discriminateur de phase. Pour des valeurs inférieures à 100 kHz le domaine de synchronisation diminue.

La tension de correction est appliquée au réflecteur du klystron à travers une batterie qui fournit la tension fixe du réflecteur. C'est dans ce sens que ce système diffère de celui réalisé par DAVIS²⁹⁾ où le discriminateur de phase et le filtre se trouvent au potentiel élevé du réflecteur.

Summary

In an earlier communication on High Resolution Microwave Spectroscopy²⁷⁾ we described a spectrograph using a phase-stabilized klystron oscillator as a local oscillator in the detection system. The stabilizing system has a 'holding range' of several megacycles which permits the sweeping of the reference crystal oscillator.

Multiplication de fréquence et stabilité en phase. Par P. KARTASCHOFF, Neuchâtel²⁶⁾.

Les oscillateurs à quartz 100 kHz fournissent une fréquence qui est très stable à long terme. Quand on multiplie la fréquence pour arriver à des fréquences de 10 000 MHz ou plus on observe que l'instabilité de la phase élargit la raie spectrale du signal.

Par contre il a été démontré que des oscillateurs à quartz relativement simples qui travaillent sur des fréquences de 5 MHz ou plus donnent un signal pur et stable à mieux que 10^{-10} à court terme³⁰⁾. Ces performances sont réalisées avec des quartz de télécommunication ordinaires (coupe *AT*). Si le quartz est thermostatisé la dérive lente de la fréquence est inférieure à 10^{-8} par jour, mais toujours plus grande que celle d'un oscillateur étalon 100 kHz.

S'il est possible de maintenir la fréquence d'un oscillateur HF sur un multiple exact de 100 kHz on peut obtenir un signal de fréquence plus stable et dont la raie spectrale est pure.

Ceci est réalisé par un système d'asservissement de la phase (figure 1) qui est basé sur le principe IGO^{31, 32)}.

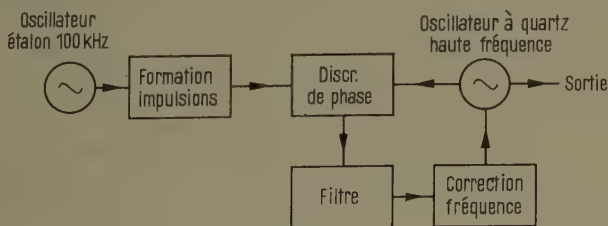


Figure 1

Circuit de stabilisation par impulsions d'un oscillateur (IGO).

²⁹⁾ E. F. DAVIS, External Publication No. 380 (Jet Propulsion Laboratory, California Inst. of Technology, 1957).

³⁰⁾ M. W. P. STRANDBERG, Letter Proc. IRE **44**, 696 (1956).

³¹⁾ E. G. HUGENHOLTZ, Philips techn. Rundschau **13**, 11 (1952).

³²⁾ G. SALMET, Proc. IRE **44**, 1582 (1956).

La phase de l'oscillation HF est comparée à des impulsions 100 kHz et le signal de correction passe à travers un filtre intégrateur (figure 2) qui a une constante de temps élevée (10–20 s) afin d'éliminer toutes fluctuations brèves. Pour la même raison le domaine de maintien de l'asservissement doit être aussi petit que possible. Dans nos essais il était de quelques 10^{-8} ce qui suffisait pour produire un signal propre et pour maintenir la fréquence asservie pendant des heures.

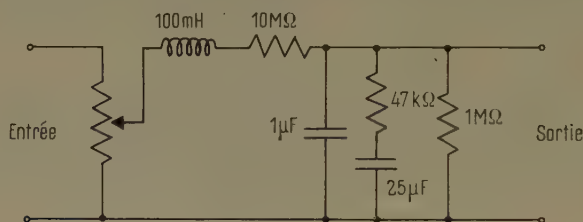


Figure 2

Filtre intégrateur qui élimine l'effet des fluctuations brèves de la phase.

Summary

A frequency multiplying system which delivers an exact multiple of the frequency of a 100 kc/s standard in the microwave region has been developed. High spectral purity of the signal has been obtained by servo-controlling the phase of a high frequency quartz crystal oscillator through an integrating filter with long time-constant.

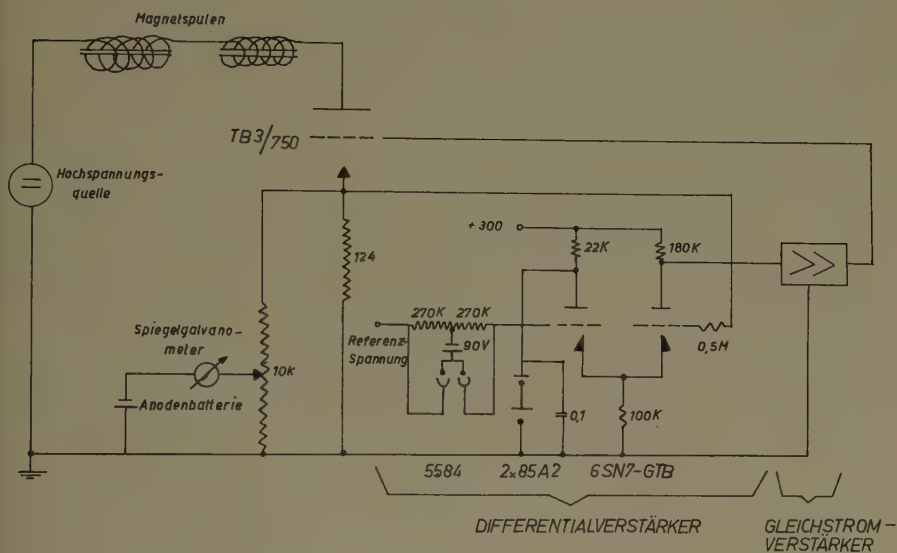
Verwendung einer Differentialphotoröhre in einem hochstabilisierenden Magnetstromregulator. Von D. BRINKMANN, E. BRUN und H. H. STAUB, Zürich³⁸⁾.

Für die Beobachtung von Kerninduktionssignalen der Breite von etwa 10 mGs bei einem Magnetfeld von rund 10 kGs ist eine Stabilität (Verhältnis des Magnetfeldes zu seiner Schwankung) von mehr als 10^6 erforderlich. Der Stabilisierungsfaktor (Verhältnis der relativen Änderungen von Primärspannung und Magnetfeld) sollte etwa 10^5 sein: Eine 1%ige Spannungsschwankung würde das Magnetfeld um 1 mG ändern.

Der bisher von uns benutzte Magnetstromstabilisator, bestehend aus Differential- und Gleichstromverstärker (Figur 1), arbeitete mit negativer Rückkopplung und hatte einen Stabilisierungsfaktor von etwa $3 \cdot 10^4$ und eine Stabilität von 10^5 . Durch Verwendung eines Spiegelgalvanometers, das die Magnetstromschwankungen auf eine Differentialphotoröhre (RCA 5584) überträgt, wurde der Rückkopplungskreis des Stabilisators verbessert und seine Verstärkung heraufgesetzt. Es wurden ein Stabilisierungsfaktor von 10^5 und eine Stabilität von $5 \cdot 10^6$ erreicht. Ein Magnetfeld von 10 kGs schwankt somit jetzt um etwa 2 mGs.

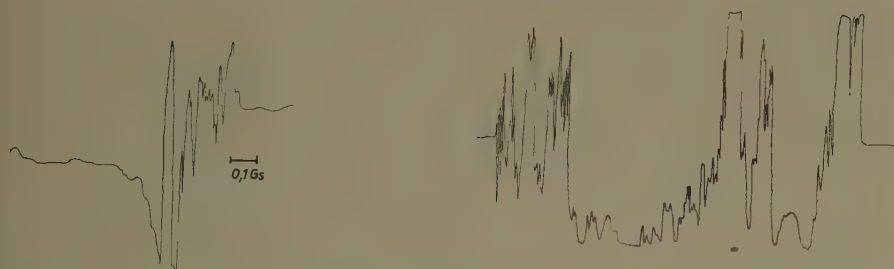
Die Aufnahmen der Figur 2 zeigen Dispersionssignale vom Deuterium, an denen die Verbesserung des Stabilisators ersichtlich ist. Die oberen Signale wurden ohne, die unteren mit Photoröhren-Stabilisierung aufgenommen. Bei den jeweiligen Aufnahmen rechts ist das konstante Magnetfeld auf die Mitte des linearen Teils des Signales eingestellt worden. Das registrierende Schreibgerät zeichnet direkt die Schwankungen auf.

³⁸⁾ Physikalisches Institut der Universität.



Figur 1

Schaltschema des Magnetstromstabilisators.



Stabilisation ohne Photoröhre



Stabilisation mit Photoröhre

Figur 2

Dispersionssignale vom Deuterium.

Gas Dynamics of Thin Bodies. Von F. I. FRANKL und E. A. KARPOVICH. Übersetzt aus dem Russischen von M. D. FRIEDMAN (Interscience Publishers. New York und London 1954). 175 S., 33 Fig.; \$5.75.

Der Übersetzer des russischen Buches über die *Gasdynamik der dünnen Körper* erklärt im Vorwort, dass die Übersetzung ins Englische zunächst nur für den internen Gebrauch im Ames Aeronautical Laboratory der NACA vorgesehen war. Die Klarheit und Ausführlichkeit der erklärenden Texte habe ihn jedoch dazu bewogen, die vollständige Übersetzung zu publizieren.

Im ersten Kapitel wird betont, dass auch Russland seinen Teil zur Begründung der Theorie der Gasdynamik beigetragen habe, wobei man mit vielen für westliche Leser unbekannten Namen vertraut gemacht wird. Anschliessend werden die Grundgleichungen hergeleitet und der Begriff des «verzögerten Potentials» eingeführt, welches sich aus der hier weniger gebräuchlichen Wahl eines mit der Strömung mitwandernden Koordinatensystems ergibt.

Im zweiten Kapitel wird der Geschwindigkeitspotential für schlanke Rotationskörper und ähnliche Körper in Unter- und Überschallströmungen berechnet und auch die beschleunigte Bewegung eines solchen Körpers betrachtet. Hierbei ergibt sich das interessante Resultat, dass die Druckkräfte auf einen mit ungefähr Schallgeschwindigkeit fliegenden Körper erst bei Beschleunigungen von über 100 g merklich ändern.

Das dritte Kapitel behandelt im wesentlichen die unendliche und die endliche Tragfläche in Unter- und Überschallströmungen, während im vierten Kapitel die instationäre Strömung um oszillierende unendliche und endliche Tragflächen, das Potential einer pulsierenden Quelle und die Theorie von Hochgeschwindigkeitspropellern (mit Unter- und Überschallgeschwindigkeit der Blattspitzen) besprochen werden. Hier versagt allerdings die linearisierte Theorie in der Nähe des kritischen Propellerradius (Schallgeschwindigkeit), so dass die Resultate wohl als theoretisch interessant, praktisch jedoch wenig brauchbar erscheinen.

Im letzten Kapitel werden die konischen Strömungsfelder behandelt. Für Physiker und theoretisch arbeitende Aerodynamiker dürfte das Buch besonders wegen des ungewohnten Einblickes in russische Arbeiten von Interesse sein. Dem Konstrukteur mögen die Hinweise fehlen, welche Genauigkeit er von den durch die linearisierte Theorie berechneten Resultaten erwarten darf. H. R. VOELLMY

Praktische Physik. Von F. KOHLRAUSCH, herausgegeben von H. EBERT und E. JUSTI (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Bd. 1 1955, Bd. 2 1956). Bd. 1 646 S., 394 Abb.; DM 36.80. Bd. 2 756 S., 435 Abb., 133 Tab.; DM 52.–.

Für diese 20. Auflage wurde der altbekannte «Kohlrausch» von den Herausgebern unter Beiziehung eines erweiterten Mitarbeiterstabes vollständig neu redigiert. Die Aufteilung des Stoffes auf die beiden Bände ist im wesentlichen gleich geblieben, nämlich:

Band 1: Mechanik, Akustik, Wärme, Optik.

Band 2: Elektrizität und Magnetismus, Korpuskeln und Quanten; Tabellen zu beiden Bänden.

An Neuem gegenüber früheren Auflagen ist besonders hervorzuheben: Allgemeine Erweiterung auf allen Gebieten unter Berücksichtigung der Forschungs-

ergebnisse bis Herbst 1954; bessere Übersichtlichkeit der Tabellen, deren Zahl zu gutem Nutzen bedeutend vermehrt wurde; die Zehnernumerierung der Abschnitte trägt viel zum leichteren Auffinden der einzelnen Begriffe bei; das wieder neu aufgenommene Kapitel «Technisches» gibt manchen nützlichen Hinweis für praktische Arbeiten im Laboratorium.

Wie der Zusatz zum Titel (Zum Gebrauch für Unterricht, Forschung und Technik) bereits andeutet, ist dieses Werk für alle in einem physikalischen Laboratorium Arbeitenden bestimmt. Stellt sich das Problem der Darstellung oder Messung irgendeiner physikalischen Grösse, so kann man sich anhand des «Kohlrausch» auf wenigen Seiten über die bisher erprobten Methoden rasch orientieren, wobei auch die theoretischen Grundlagen kurz gestreift werden; um die Handlichkeit des Werkes nicht zu beeinträchtigen, mussten natürlich allzu detaillierte Angaben vielfach weggelassen werden ebenso wie die Beschreibung gewisser sehr spezieller Methoden; in diesen Fällen aber wird dem Suchenden die Fülle der Literaturzitate (Originalarbeiten und zusammenfassende Darstellungen) weiterhelfen.

Der schwierige Kompromiss, einen Stoff von gewaltigem Ausmass in ein wirkliches Handbuch zum Laboratoriumsgebrauch zusammenzudrängen, ist den Herausgebern wiederum gut gelungen. U. KATZ

Technische Schwingungslehre in ihren Grundzügen. Von E. HÜBNER (Springer-Verlag, Berlin 1957). 322 S, 208 Abb.; DM 29.40.

Der Springer-Verlag hat eine Anzahl guter Schwingungsbücher herausgebracht. Man denke etwa an die *Technische Schwingungslehre* von HORT, an das gleichnamige, leider noch immer fragmentarische Buch von KLOTTER oder an die verdienstvolle Mesmersche Übertragung der *Mechanical Vibrations* von DEN HARTOG. Wer diese Werke auch nur flüchtig kennt, dem bleibt es unverständlich, wie der Verfasser des vorliegenden Buches (gemäss Vorwort) eine Lücke findet zwischen den Werken «von hohem wissenschaftlichen Niveau...», die deshalb für den durchschnittlich mathematisch Geschulten nur schwer zugänglich sind, und den übrigen Lehrbüchern, die «gut verständlich sind», aber «nicht tief genug in die schwingungstechnischen Problemstellungen eindringen». Das vorliegende Buch schliesst keine Lücke.

Dass die Periode einer Schwingung nunmehr «Periodendauer» heisst (S. 1), die Abszissenachse kurzweg «Abszisse» (S. 4), dass eine Feder nicht etwa verlängert, sondern «gelängt» wird (S. 28) und dass eine Beschleunigung «erfolgt» (S. 28), sind begriffliche und stilistische Details, die lediglich nebenbei vermerkt werden sollen. Schwerer zu übersehen ist es, wenn etwa (S. 3) ein Winkel im Text mit χ und in der zugehörigen Abbildung mit ψ bezeichnet ist, wenn eine Summe (S. 10) über mehr Summanden erstreckt wird, als in Wirklichkeit vorhanden sind, oder wenn das axiale Trägheitsmoment eines Querschnittes (S. 30) in den Rang eines «äquatorialen Trägheitsmomentes» erhoben wird. Dass eine Funktion $y(t)$ in der Form y_i geschrieben wird (S. 3), ist ja eine leider noch weitverbreitete Gepflogenheit; trotzdem sollte bei einer komplexen Zeitfunktion $z(t)$ die reelle Achse (S. 15) nicht mit der Zeitachse verwechselt werden.

Neben diesen kleineren Mängeln enthält das Hübnersche Buch aber auch viele gröbere Fehler.

So wird zum Beispiel (S. 3) festgestellt: «Winkelfunktionen sind dann einander gleich, wenn ihre Argumente gleich gross sind oder sich um den Winkel 2π (oder ein Vielfaches davon) unterscheiden.» Bei der Behandlung der Schwebung (S. 20) (die er übrigens auch als «pseudoharmonische Schwingung» bezeichnet) kommt

der Autor auf Grund einer Diskussion in der komplexen Ebene zum Ergebnis, dass die Frequenz der resultierenden Schwingung stetig veränderlich sei. Als Voraussetzung der Entwickelbarkeit einer Funktion in eine Fouriersche Reihe wird (S. 21) neben ihrer Endlichkeit ihre Differenzierbarkeit angeführt.

Behandelt man einen gedämpften Schwinger mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips, so hat man bekanntlich die am Schwinger angreifenden Kräfte, nämlich die Federkraft, die Dämpfungskraft und die Trägheitskraft, ins Gleichgewicht zu bringen. Manchen Studierenden macht dieser einfache Sachverhalt erfahrungsgemäss Mühe. Die Situation wird aber schlechthin hoffnungslos, wenn man, wie dies der Verfasser (S. 32, 38) wörtlich und (S. 71 usw.) in übertragenem Sinne durch den ganzen Text hindurch tut, die Federkraft als Reaktion der an der Feder ausgeübten Kraft, die Dämpfungskraft als Reaktion der « zur Überwindung der Reibungskräfte erforderlichen Kraft » und schliesslich die Trägheitskraft als Reaktion einer Massenkraft » definiert, die zur Beschleunigung des Schwingers aufzuwenden sei.

Diese Beispiele dürften ausreichen, um darzulegen, dass das Buch kaum so « tief in die Zusammenhänge eindringt », wie dies der Autor im Vorwort wörtlich in Aussicht stellt. Im übrigen fehlt es auch nicht an Stellen mit einer heiteren Note, so zum Beispiel, wenn (S. 133) die Auffassung vertreten wird, dass das Verfahren von RAYLEIGH eine Verallgemeinerung des Energiethereoms auf Systeme mit mehreren Freiheitsgraden darstelle.

H. ZIEGLER

High Altitude Rocket Research. Von HOMER E. NEWELL, jr. (Academic Press, Inc., New York 1953). 298 S., 93 Abb.; \$7.50.

Die von den Amerikanern am Ende des Zweiten Weltkrieges in Deutschland erbeuteten V2-Raketen wurden in Amerika teilweise zur Erforschung der höheren Atmosphäre eingesetzt. Später konnten vom « Upper Atmosphere-Rocket Research Panel » noch die in Amerika entwickelten Höhenraketen Aerobee und Viking eingesetzt werden. Die in den Jahren 1946 bis 1952 gesammelten Resultate sind im vorliegenden Buch in allgemeinverständlicher Form veröffentlicht.

Die einzelnen Abschnitte des Buches sind nach den folgenden Sachgebieten geordnet: Die Rakete als Messkörper, Mess- und Fernmeldetechnik, Druck, Dichte und Temperatur in der höheren Atmosphäre, Winde, Messung der Strahlung der Sonne, Zusammensetzung der oberen Atmosphäre, die Ionosphäre und das erdmagnetische Feld, kosmische Strahlen, Höhenphotographie.

Die gesammelten Daten erstrecken sich zum Teil bis auf Höhen von 220 km. Der Verfasser hat sich verdankenswerterweise die Mühe genommen, nicht nur die Messresultate zu veröffentlichen, sondern auch einen kurzen Abriss über die Messtechnik und die Auswertemethode zu geben. Besonders diese Seite des Buches dürfte einen grösseren Leserkreis anziehen, während es den Physikern, Meteorologen und Aerodynamikern überlassen bleibt, die in Kurven- und Tabellenform erfassten Resultate weiter zu verarbeiten.

H. R. VOELLMY

Magnetohydrodynamics. Von T. G. COWLING ([Interscience Tracts on Physics and Astronomy, number 4] Interscience Publishers, New York and London 1957). 115 S., 17 Abb.; \$1.75 / \$3.50.

Als G. E. HALE vor einem halben Jahrhundert die Magnetfelder der Sonnenflecken entdeckte, konnte kein Zweifel bestehen, dass viele Erscheinungen der Sonnenphysik, zu denen später die Bewegungen der Protuberanzen und Eruptionen sowie die Struktur der Korona hinzukamen, nur durch koordinierte thermodynamische, hydromechanische und magnetische Betrachtungen zu ver-

stehen sind. Trotzdem kann erst seit etwa 15 Jahren von einer Magnetohydrodynamik gesprochen werden. Wenn auch ihre vornehmlichsten Gefilde Probleme der Astrophysik sind, so hat sie in neuerer Zeit doch auch Eingang gefunden in der Geo- und Plasmaphysik. Einige wenige der ausschliesslich theoretischen Resultate konnten bereits auch durch Modellversuche an bewegten leitenden Flüssigkeiten in Magnetfeldern verifiziert werden. In diesem Stadium dieser jungen Wissenschaft ist das knappe Büchlein von T. G. COWLING, der an ihrer Entwicklung einen starken Anteil hat, sehr zu begrüßen. Der Autor führt im ersten Kapitel in die Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik ein und behandelt auf ihrer Grundlage in den folgenden Kapiteln eine Reihe von speziellen Problemen, wie das magnetostatische Gleichgewicht von Sonnenflecken, die Spiralarme der Galaxien, die Sternrotation, die magnetischen Sterne, die magnetohydropneumatischen Wellen und ihre Anwendung auf die Theorie der Sonnenflecken, sowie interstellare und terrestrische Magnetfelder. Durch diese Abwandlung des Themas bleibt der Leser dieser anspruchsvollen Monographie bis zum Schluss in Spannung. Leider können stets nur die Wege zu den Lösungen, nicht aber diese selbst aufgezeigt werden. Der Grund dafür liegt einerseits in dem fast völligen Fehlen experimenteller Erfahrung in der Magnetohydrodynamik und damit im Mangel an Intuition auf diesem Gebiet, besonders aber in den fast unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten bei der Behandlung nichtlinearer Probleme. In zwei Punkten scheint diesem Büchlein eines Pioniers ein Erfolg sicher zu sein: in der Klärung der noch vielfach wirren Ansichten auf dem Gebiet der Magnetohydrodynamik und in der Weckung von Interesse und Verständnis für dieses dornenvolle Neuland.

M. WALDMEIER

Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Von R. ZURMÜHL. 2. Auflage (Springer-Verlag, Berlin 1957). 524 S., 125 Abb.; DM 28.50.

Diese bereits in weiten Kreisen bekannte Einführung in die numerischen Verfahren der praktischen Mathematik befasst sich hauptsächlich mit linearen Gleichungssystemen, Matrizen-Eigenwertaufgaben, Ausgleichsrechnung, Rand- und Eigenwertaufgaben von Differentialgleichungen und anderem mehr. Für jede der angegebenen Methoden wird die mathematische Fragestellung klar herausgearbeitet, wobei zum Verständnis lediglich die Grundbegriffe der Integral- und Differentialrechnung vorausgesetzt werden. Das Hauptgewicht liegt jedoch auf der praktischen Anwendung, was mit vielen durchgerechneten Beispielen unterstrichen wird.

Für die zweite Auflage wurde ausser der Neufassung einiger Kapitel auch ein Abschnitt über die wichtigsten Prüfverfahren der Statistik neu aufgenommen.

TH. GINSBURG

Einführung in die Methoden der Programmierung kaufmännischer und wissenschaftlicher Probleme für elektronische Rechenanlagen.

1. Teil: *Die Logik der Programmierung*. Von BRUNO THÜRING (Göller Verlag, Baden-Baden 1957). 200 S., 100 Abb.; DM 45.-.

Der vorliegende erste Band behandelt diejenigen elementaren Gesichtspunkte der Programmierung digitaler Rechenanlagen, die von den konstruktiven Besonderheiten der jeweiligen Anlage unabhängig sind. Er setzt keine besonderen Vorkenntnisse voraus und ist deshalb als Einführung in die Programmierungstechnik für Nationalökonomien und Betriebswissenschaftler ebenso wie für Mathematiker und Ingenieure geeignet.

Im ersten Kapitel werden einige grundlegende Dinge, wie das duale Zahlensystem, Buchstaben- und Zahlenverschlüsselung und das Rechnen mit festem und beweglichem Komma, behandelt.

Im zweiten und dritten Kapitel wird anhand von kaufmännischen (2. Kapitel) und wissenschaftlichen Problemen (3. Kapitel) der Aufbau eines Rechenplanes auseinandergesetzt, was in erster Linie durch eine ausführliche Betrachtung der Fluss- oder Ablaufdiagramme geschieht. Als Übergang zur Befehlsverschlüsselung wird die algorithmische Schreibweise eines Rechenplanes nach H. RUTISHAUSER eingeführt.

Das vierte Kapitel befasst sich mit den besonderen Problemen der Ein- und Ausgabe, wie sie sich beim Zusammenspiel innerer und äusserer Speicher ergeben.

Zu bedauern ist, dass frühere Arbeiten über die Programmierung (insbesondere das grundlegende Werk von J. VON NEUMANN und GOLDSTONE), von denen natürlich vieles übernommen wurde, nicht verzeichnet sind.

Das einfach und klar geschriebene Buch, das sich auch durch eine ansprechende drucktechnische Gestaltung auszeichnet, kann als erste Einführung in das Gebiet der Programmierung bestens empfohlen werden. W. NEF

Präzisionsmessungen von Kapazitäten, Induktivitäten und Zeitkonstanten. Von E. BLECHSCHMIDT. Band 2 (Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1957). 166 S., 74 Abb.; DM 11.80.

Anlässlich der Besprechung des ersten Teiles dieser Monographie (Kapazitätsmessungen) wurde bereits auf das baldige Erscheinen des zweiten ergänzenden Heftes über Induktivitätsmessungen hingewiesen [ZAMP 8, 430 (1957)], das nun erschienen ist. Die übersichtliche Zusammenstellung über Induktivitätsnormale und über die bewährten Messverfahren zur Untersuchung von Spulen darf Physikern und Ingenieuren unbedenklich empfohlen werden. E. BALDINGER

Momentum Transfer in Fluids. Von W. H. CORCORAN, J. B. OFFELL und B. H. SAGE (Academic Press Inc., New York 1956). 394 S., 155 Fig.; \$9.-

Die Verfasser sind von der Absicht ausgegangen, diejenigen Teile der Strömungslehre zusammenzufassen, die für den Chemieingenieur von Interesse sind. Daraus erklärt sich die etwas eigentümliche Auswahl und Abgrenzung des Stoffes. Deutlich spiegelt sich hier die amerikanische Methode der Ingenieurausbildung wieder, die von vornherein mehr den Spezialisten anstrebt als die europäische. Das vorliegende Buch ist aber nichtsdestoweniger weit davon entfernt, nur für den Chemieingenieur von Nutzen zu sein, sondern es verdient die Beachtung aller, die sich mit industriellen Strömungsproblemen abzugeben haben.

Es werden zunächst die wichtigsten Grundtatsachen behandelt (Bernoullische Gleichung usw.). Recht ausführlich werden Erscheinungen der Turbulenz besprochen. Auch eine Einführung in die Grenzschichttheorie wird gegeben. In einem Anhang werden die Elemente der Tensorrechnung gegeben, und auf dieser Grundlage wird in einer mathematisch systematischeren Weise nochmals auf die statistische Turbulenztheorie zurückgegriffen. Das Buch beschränkt sich im wesentlichen auf die zusammenfassende Darlegung bekannter Tatsachen, dies aber in einer Weise, die dem Studierenden und dem Ingenieur in der Praxis eine wertvolle Hilfe sein kann. Über gewisse formale Schönheitsfehler, wie etwa dass immer noch mit dem spezifischen Gewicht statt mit der Dichte gearbeitet wird, kann man wegsehen.

W. TRAUPEL

Vient de paraître

GARNIR

Les problèmes aux limites de la physique mathématique

Par H. G. GARNIR, Chargé de cours à l'Université de Liège (Belgique)
234 pages avec 5 figures. Prix Fr. 29.- (DM 29.-)

Mathematische Reihe, Band 23

«Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften»

Cet ouvrage concerne l'application des méthodes de l'analyse fonctionnelle à la théorie générale des problèmes aux limites de l'équation des ondes et de la diffusion. La fonction de GREEN de ces problèmes est étudiée minutieusement et son rôle dans la résolution effective mis en évidence. Ce livre contient notamment une justification définitive des méthodes heuristiques basées sur les transformations de LAPLACE et de FOURIER par lesquelles les physiciens recherchent ces fonctions de GREEN. L'auteur fait largement appel à diverses théories transcendantes comme la théorie actuelle des espaces hilbertiens et la théorie des distributions de L. SCHWARTZ. Cependant, l'exposé a été rendu self-consistent et présenté de manière à être compris d'un lecteur possédant seulement une bonne connaissance de l'analyse classique.

Matières: Théorie des espaces fonctionnels hilbertiens – Problème de DIRICHLET-NEUMANN pour l'opérateur métaharmonique – Transformation de LAPLACE inverse dans la théorie des distributions – Problème de DIRICHLET-NEUMANN pour les opérateurs des ondes et de la diffusion.



BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL/STUTTGART

clichés
in jeder Technik



SCHWITTER
A-G

BASEL / ZÜRICH